Μετρήσεις, σφάλματα και αβεβαιότητες στις γεωδαιτικές επιστήμες. Έννοιες και ορισμοί

Α. Φωτίου

Εργαστήριο Γεωδαιτικών Μεθόδων και Δορυφορικών Εφαρμογών,
Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Τμήμα ΑΤΜ, Πολυτεχνική Σχολή, ΑΠΘ
afotiou@topo.auth.gr

Περίληψη: Με έμφαση στις τοπογραφικές και γεωδαιτικές επιστήμες και εφαρμογές, στην παρούσα εργασία δίνονται ορισμοί και σχολιάζονται βασικές έννοιες που αφορούν στα σφάλματα και την αβεβαιότητα των αντιστοίχων μετρήσεων, στην ακρίβεια και την αξιοπιστία των εκτιμήσεων παραμέτρων και γενικότερα στον ποιοτικό έλεγχο. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην έννοια της μέτρησης ή παρατήρησης, στη διαφορά της από την απαρίθμηση και στη σημασία των σημαντικών ψηφίων σε σχέση και με το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων. Επισημαίνονται ορισμένες διαφορές που υπάρχουν στη διεθνή επιστημονική κοινότητα επειδή οι εν λόγω έννοιες αφορούν όλους τους κλάδους των επιστημών που εμπλέκονται με μετρήσεις και εργαστηριακούς ελέγχους. Στόχος της εργασίας είναι η βελτίωση μιας κοινής γλώσσας επικοινωνίας και η αποφυγή παρερμηνειών μεταξύ επιστημόνων και τεχνικών που ασχολούνται ή εμπλέκονται σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με παρόμοια θέματα, ιδιαίτερα μεταξύ των Τοπογράφων Μηχανικών.

Λέξεις κλειδιά: *μέτρηση, σφάλμα μέτρησης, αβεβαιότητα, ποιότητα, ακρίβεια, εσωτερική ακρίβεια, αξιοπιστία, βέλτιστη εκτίμηση, σημαντικά ψηφία.*

1. Εισαγωγή

Στις γεωδαιτικές επιστήμες και ιδιαίτερα στην Τοπογραφία και την Γεωδαισία, με έμφαση τον προσδιορισμό συντεταγμένων, την κατασκευή χαρτών και διαγραμμάτων και την υλοποίηση σημείων στο έδαφος (χαράξεις), χρησιμοποιούνται μετρήσεις και υπολογισμοί. Τα αποτελέσματα, πρωτογενή ή παράγωγα, πρέπει να αξιολογούνται και να συνοδεύονται από μέτρα που να αφορούν στην ποιότητά τους, ακρίβεια και αξιοπιστία (βλ. π.χ., Δερμάνης 1986, Καλτσίκης και Φωτίου 1990, Ρωσσικόπουλος 1992, Δερμάνης και Φωτίου 1992, Φωτίου 2007) Ο ποιοτικός έλεγχος των μετρήσεων και των αποτελεσμάτων μιας επεξεργασίας αποτελεί ουσιαστικό μέρος στο πλαίσιο μιας μελέτης ή μιας εφαρμογής.

Έννοιες όπως σφάλμα, ποιότητα, ακρίβεια, εσωτερική ακρίβεια, εξωτερική ακρίβεια, αξιοπιστία, επαναληψιμότητα, αβεβαιότητα, ποιοτικός έλεγχος και αξιολόγηση, σε συνδυασμό με την αντίστοιχη ορολογία τους στην αγγλική και ελληνική γλώσσα, π.χ. από μετάφραση φυλλαδίων και τευχών τεχνικών χαρακτηριστικών και οδηγιών, προκαλούν πολλές φορές ασάφεια, σύγχυση και παρερμηνείες μεταξύ επιστημόνων όχι μόνον διαφορετικών ειδικοτήτων αλλά και της ίδιας ειδικότητας, ανάλογα με το γνωστικό υπόβαθρο και την εμπειρία τους. Ένα παράδειγμα που μπορεί να δημιουργήσει συχνά παρερμηνείες, αφορά στους όρους "precision" και "accuracy" που στην ελληνική γλώσσα αποδίδονται ως "ακρίβεια" ενώ πρόκειται για δύο τελείως διαφορετικές έννοιες όπως θα δούμε παρακάτω. Για τον μη ειδικό, ακόμα και στην ξενόγλωσση ορολογία, υπάρχει η εντύπωση ότι οι δύο έννοιες είναι ταυτόσημες.

Εδώ και μερικές δεκαετίες γίνονται διεθνώς προσπάθειες, από αρμόδιους οργανισμούς, θεσμούς, επιστημονικές και επαγγελματικές ενώσεις, να οριστούν από κοινού βασικές έννοιες, προδιαγραφές, έλεγχοι και μέτρα έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται τα προβλήματα ασυμφωνιών και ασυμβατοτήτων και να γίνει αποδεκτή μία "κοινή γλώσσα" επιστημονικής συνεννόησης. Στην παρούσα εργασία θα γίνει επίσης μία προσπάθεια να διασαφηνιστούν οι παραπάνω βασικές έννοιες και να δοθούν κατάλληλοι ορισμοί, συμβάλλοντας στη βελτίωση της επικοινωνίας μεταξύ των επιστημόνων και τεχνικών που ασχολούνται είτε άμεσα, π.χ. Τοπογράφοι Μηχανικοί ή έμμεσα, π.χ. Μηχανικοί άλλων ειδικοτήτων, αλλά και συμβολαιογράφοι, δικηγόροι, δικαστές, που συχνά στα αντικείμενά τους εμπλέκονται οι παραπάνω έννοιες. Έμφαση θα δοθεί στους άμεσα ενδιαφερόμενους Τοπογράφους Μηχανικούς επειδή αυτοί συνήθως φέρουν το μεγαλύτερο "βάρος" της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων, της σωστής ερμηνείας, της επεξήγησης εννοιών, μεθοδολογιών, ελέγχων και ποσοτικών μέτρων που συνοδεύουν τα αποτελέσματα μιας τοπογραφικής ή γεωδαιτικής εργασίας.

Ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα της μέτρησης μιας απόστασης S μεταξύ δύο σημείων του εδάφους, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο όργανο μέτρησης. Ανάλογα με την επιδιωκόμενη "ακρίβεια", το μέγεθος της απόστασης, τις εδαφολογικές και περιβαλλοντικές συνθήκες, επιλέγεται ένα κατάλληλο όργανο και μία κατάλληλη μετρητική μεθοδολογία, ώστε να προκύψει το εξαγόμενο της μέτρησης, δηλαδή ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, π.χ. $d = 100.24$ m. Βασικά ερωτήματα θα μπορούσε να είναι: Ποιά ακριβώς απόσταση μετράμε; Πώς υλοποιούνται τα δύο σημεία στο έδαφος; Υπάρχει "τέλειο" όργανο μέτρησης ή "τέλειες" ανθρώπινες ικανότητες; Μπορούμε να προσδιορίσουμε την αληθινή/πραγματική απόσταση ή να την προσεγγίσουμε ικανοποιητικά και με ποιά "αβεβαιότητα" ή "ακρίβεια";

Πρέπει καταρχάς να αποδεχτούμε ότι ο φυσικός κόσμος ή αλλιώς ο αληθινός/πραγματικός κόσμος που μελετάμε, είναι αδύνατον να γίνει τέλεια γνωστός, επειδή όλοι οι παράγοντες που συμμετέχουν στη μετρητική διαδικασία είναι ατελείς σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό και μάλιστα υπάρχουν και κάποιοι που είναι εντελώς άγνωστοι. Αυτό που επιδιώκεται είναι μια ικανοποιητική προσέγγισή του μεγέθους της απόστασης με κάποια απόκλιση από την αληθινή άγνωστη τιμή.

Η απόσταση S μπορεί να ειδωθεί ως ένα τμήμα του φυσικού κόσμου - ένα φυσικό σύστημα ή ένα νοητικό κατασκεύασμα - που μελετάται αγνοώντας την αλληλεπίδραση με τον υπόλοιπο φυσικό κόσμο. Η έννοια της απόστασης που υλοποιείται στο έδαφος π.χ. από το κέντρο των κεφαλών δύο μικρών καρφίδων αποτελεί ένα νοητικό κατασκεύασμα, ένα πρότυπο/μοντέλο, μία προσέγγιση της άγνωστης πραγματικότητας, καθώς η έννοια του μαθηματικού/αδιάστατου σημείου δεν υπάρχει στη φύση.

Η αληθινή ή η πραγματική τιμή μιας παραμέτρου που πρόκειται να μετρηθεί (στο παράδειγμα S) ονομάζεται ***παρατηρούμενη παράμετρος*** ή ***παρατηρούμενη ποσότητα*** (**observable parameter/ quantity, *measurand*, *true value***). Η τιμή αυτή είναι συγκεκριμένη, αποτελεί δηλαδή ντετερμινιστική ή προσδιοριστική ποσότητα, αλλά παραμένει πάντοτε άγνωστη. Το αριθμητικό αποτέλεσμα της μετρητικής διαδικασίας (στο παράδειγμα d) ονομάζεται ***παρατήρηση*** ή ***μέτρηση*** (***observation*, *measurement, measured value***), επισημαίνοντας ότι πολλές φορές οι όροι αυτοί αποδίδουν και τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε και όχι την αριθμητική τιμή. Ακόμα και με το τελειότερο όργανο μέτρησης, ***η παρατήρηση αποτελεί ένα είδος εκτίμησης της πραγματικής τιμής***, μια αντανάκλαση της άγνωστης πραγματικότητας.

Η διαφορά της άγνωστης πραγματικής τιμής της παρατηρούμενης παραμέτρου από την παρατήρηση ονομάζεται ***σφάλμα*** ή ***σφάλμα μέτρησης*** ή ***σφάλμα παρατήρησης*** (***error, measurement error, observational error***). Η διαφορά αυτή λαμβάνεται συμβατικά και θα μπορούσε να οριστεί και με αντίθετο πρόσημο. Εάν συμβολίσουμε με v το σφάλμα της μέτρησης της απόστασης, τότε

$$v = d - S \tag{1}$$

δηλαδή

$$\underset{}{\textit{σφάλμα}} = \underset{\textit{(αριθμητική τιμή)}}{\textit{παρατήρηση}} - \underset{\textit{(άγνωστη τιμή)}}{\textit{παρατηρούμενη παράμετρος}}$$

Σημειώνεται ότι επειδή η παρατηρούμενη παράμετρος είναι άγνωστη θα είναι άγνωστη και η τιμή του σφάλματος. Πολλές φορές, π.χ. σε εργαστηριακούς ελέγχους βαθμονόμησης οργάνων, η άγνωστη πραγματική τιμή μιας παραμέτρου υποκαθίσταται από μία ***τιμή αναφοράς*** (***reference value, reference standard***) η οποία προέκυψε από όργανα και μεθόδους υψηλής ποιότητας ώστε τα ελεγχόμενα όργανα να μπορούν να αξιολογηθούν και να βαθμονομηθούν.

Καθοριστικό είναι το ερώτημα για το εάν είναι δυνατόν να έχουμε μια εκτίμηση του σφάλματος και ποιος είναι ο βαθμός αμφιβολίας ή αβεβαιότητας του σφάλματος ή ισοδύναμα της αντίστοιχης μέτρησης. Η απάντηση είναι θετική, διαφορετικά τα αποτελέσματα δεν θα μπορούσαν να αξιολογηθούν ως προς την ποιότητά τους και να συγκριθούν με άλλα παρόμοια αποτελέσματα που δίνονται από διαφορετικούς μελετητές και εργαστήρια, με πιθανές αρνητικές συνέπειες, π.χ. ως προς το οικονομικό κόστος, το περιβάλλον και ακόμα την ασφάλεια της ανθρώπινης ζωής. Ας σκεφτούμε τις συνέπειες όταν π.χ. μία σήραγγα διανοίγεται ταυτόχρονα από δύο μέτωπα (αρχή - τέλος) και λόγω ποιοτικά "κακών" μετρήσεων η συνάντηση να γίνει στο ενδιάμεσο με απόκλιση μερικών μέτρων.

2. Μετρήσεις και Σφάλματα

Επανερχόμενοι στο παράδειγμα της μέτρησης της απόστασης μεταξύ δύο σημείων, η μετρητική διαδικασία δεν είναι μια απλή υπόθεση, όπως ίσως φαίνεται, καθώς περιλαμβάνει μία σειρά επιμέρους διαδικασιών που πρέπει να ακολουθηθούν με επιμέλεια και αρκετούς παράγοντες που επιδρούν. Ακόμα και στην απλή περίπτωση που χρησιμοποιείται μία μετροταινία, θα πρέπει δύο άτομα να "ταυτίσουν/κεντρώσουν" δύο σημεία της μετροταινίας πάνω στα αντίστοιχα δύο σημεία του εδάφους, π.χ. το σημείο «αρχή» της μετροταινίας στο πρώτο σημείο του εδάφους και το σημείο «πέρας» στο δεύτερο σημείο, να τεντώσουν την μετροταινία κατάλληλα ώστε να είναι ευθεία και να αναγνώσουν τις ενδείξεις των οποίων η διαφορά δίνει τη μέτρηση, δηλαδή το μήκος της απόστασης. Αν η μετροταινία είναι μεταλλική θα πρέπει επιπλέον να ληφθεί υπόψη και η θερμοκρασία για πιθανή μεταβολή του ονομαστικού της μήκους. Σε πρώτη προσέγγιση η μέτρηση d αποτελεί μία ***εκτίμηση*** (***estimation***) της άγνωστης αληθινής τιμής της παρατηρούμενης απόστασης S. Τόσο η αληθινή τιμή όσο και το σφάλμα της μέτρησης/παρατήρησης παραμένουν άγνωστα.

Γίνεται αντιληπτό ότι αν τα ίδια άτομα επαναλάβουν την ίδια μέτρηση με την ίδια μετροταινία, την ίδια μέθοδο μέτρησης και τις ίδιες συνθήκες περιβάλλοντος, η τιμή που θα προκύψει θα διαφέρει, έστω και πολύ λίγο, από την προηγούμενη (η παρατήρηση ως μεταβλητή - variable - στη μαθηματική γλώσσα). Αυτό συμβαίνει επειδή κάποιες από τις 'συνθήκες μέτρησης' έχουν μεταβληθεί, π.χ. οι νέες κεντρώσεις στα σημεία δεν είναι ακριβώς ίδιες με τις προηγούμενες ή η μετροταινία δεν τεντώθηκε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ή επειδή διαφέρει η εκτίμηση του τμήματος μεταξύ των ελάχιστων υποδιαιρέσεων της μετροταινίας. Κατά συνέπεια οι δύο διαδοχικές μετρήσεις d_1 και d_2 δίνουν τη δυνατότητα για μία νέα εκτίμηση, τη μέση τιμή $\overline{S}$ της παρατηρούμενης απόστασης S

$$\overline{S} = \frac{d_1 + d_2}{2} \tag{2}$$

ή γενικότερα για n επαναλήψεις της μέτρησης

$$\overline{S} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} \tag{3}$$

Επίσης, οι εκτιμήσεις των αντιστοίχων (άγνωστων) σφαλμάτων v_i θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{v}_1 = d_1 - \overline{S}, \quad \hat{v}_2 = d_2 - \overline{S}, \; \ldots \; \hat{v}_n = d_n - \overline{S} \tag{4}$$

Αυξάνοντας το πλήθος των μετρήσεων, έστω και κατά μία παραπάνω, παρέχεται η δυνατότητα ελέγχου, ανίχνευσης ή και εντοπισμού των σφαλμάτων με σχετικά μεγάλο μέγεθος. Έτσι οι προβληματικές παρατηρήσεις μπορούν είτε να διορθωθούν είτε να εξαιρεθούν εάν δεν καταστεί δυνατός ο εντοπισμός των σημαντικών σφαλμάτων, οπότε μία καλύτερη εκτίμηση της απόστασης θα γίνει με βάση τις μη προβληματικές παρατηρήσεις. Ως προβληματική παρατήρηση θεωρούμε συμβατικά εκείνη που χαρακτηρίζεται από ένα σημαντικό σφάλμα (κατά κανόνα με μεγάλη τιμή) που ο μελετητής εκτιμά με κάποιο κριτήριο που σχετίζεται συνήθως με την ακρίβεια του οργάνου σε συνδυασμό και με τη μετρητική μεθοδολογία.

Σε ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας, η εκτίμηση του σφάλματος αποδίδεται με τον όρο "***residual***" (**εκτίμηση σφάλματος**, **υπόλοιπο**) το οποίο λαμβάνεται με αντίθετο πρόσημο σε σχέση με τον παραπάνω ορισμό του σφάλματος.

Πολλές φορές δημιουργείται σύγχυση μεταξύ της αριθμητικής πληροφορίας που προκύπτει από τη μέτρηση/παρατήρηση και εκείνης που προκύπτει από την ***απαρίθμηση ή καταμέτρηση*** (***count***, ***counting***). Πρέπει να διευκρινιστεί ότι ***η παρατήρηση ή μέτρηση δεν είναι απαρίθμηση/καταμέτρηση***, με την τελευταία να αφορά σε ένα πλήθος ευδιάκριτων αντικειμένων ή ατόμων. Για παράδειγμα η απαρίθμηση του συνόλου των φοιτητών σε μία αίθουσα διδασκαλίας ή των θρανίων της αίθουσας έχει ως αποτέλεσμα τους ίδιους ακριβείς φυσικούς αριθμούς, π.χ. 46 φοιτητές, 23 θρανία, όσες φορές και αν επαναληφθεί, εξαιρώντας βέβαια την περίπτωση να έχει γίνει ένα χονδροειδές λάθος. Η μέτρηση όμως, π.χ. της απόστασης S του παραδείγματος, δίνει αριθμητικές τιμές που διαφέρουν από επανάληψη σε επανάληψη, όπως 100.241, 100.243, 100.238, 100.239, 100.244 ή οποιαδήποτε τιμή που στρογγυλοποιείται στην τιμή d = 100.24 m. Η παρατήρηση d δεν αποτελεί 100% ακριβή τιμή. Υπάρχει πάντοτε μια αβεβαιότητα στο τελευταίο ψηφίο ώστε θεωρητικά θα μπορούσε να έχουμε άπειρα ψηφία, π.χ. d =100.241236784978653... m, συνεπώς άπειρες τιμές, μιας και δεν γνωρίζουμε την πραγματική τιμή. Η απαρίθμηση οδηγεί σε έναν διακριτό αριθμό (discrete number) χωρίς αβεβαιότητα και σφάλμα (εξαιρείται το χονδροειδές) ενώ η μέτρηση σε έναν συνεχή αριθμό (continuous number) με αβεβαιότητα και σφάλμα. Η μέτρηση με την αβεβαιότητα και το σφάλμα συνυπάρχουν πάντοτε. Υπάρχει μεγάλος κίνδυνος λανθασμένων ερμηνειών εάν δεν γίνουν κατανοητά τα προηγούμενα. Γενικότερα, η ανάλυση των παρατηρήσεων απαιτεί σοβαρή γνώση, κρίση, εφαρμογή μαθηματικών και στατιστικών μεθόδων και αποδοχή ότι τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι αναπόφευκτα όποιο και αν είναι το μέγεθός τους.

Ο όρος σφάλμα χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει οποιοδήποτε σφάλμα μιας μέτρησης ανεξάρτητα από την πηγή, το μέγεθος, τα χαρακτηριστικά και τη συμπεριφορά του σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Τυχόν διορθώσεις των παρατηρήσεων, π.χ. λόγω θερμοκρασίας, υψομέτρου, προβολής σε κάποια επιφάνεια αναφοράς, που μπορούν να προσδιοριστούν και να διορθώσουν τις αρχικές παρατηρήσεις, δεν σημαίνει ότι τελικά δεν έχουν απομείνει κάποια σφάλματα στις διορθωμένες παρατηρήσεις. Επειδή λοιπόν ***τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι αναπόφευκτα***, αυτό που μπορεί να γίνει είναι να προσδιοριστεί και να περιγραφεί η επίδρασή τους στις παραμέτρους του φυσικού συστήματος που μελετάμε. Για αυτόν το λόγο είναι αναγκαίο να ανατρέξουμε στη μαθηματική στατιστική θεωρία και στη θεωρία των πιθανοτήτων όπου τα σφάλματα θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές και οι αντίστοιχες παρατηρήσεις δειγματικές τιμές τυχαίων μεταβλητών (στοχαστική συμπεριφορά). Η αλληλοτροφοδότηση μεταξύ θεωρητικών μοντέλων και πρακτικών εφαρμογών οδηγεί στη βελτίωση τόσο της θεωρίας (απλούστερα ή συνθετότερα μαθηματικά μοντέλα) όσο και της πράξης (καλύτερες μέθοδοι/ τεχνικές, επιλογή κατάλληλου εξοπλισμού, ικανοποίηση προδιαγραφών, μικρότερο οικονομικό κόστος).

2.1 Η σημασία των πλεοναζουσών παρατηρήσεων

Οι ***πλεονάζουσες παρατηρήσεις*** αποτελούν για την Τοπογραφία και τη Γεωδαισία απαραίτητη προϋπόθεση για ποιοτικά αποτελέσματα. Σε πιο σύνθετα προβλήματα, όπως είναι η συνόρθωση των τοπογραφικών και γεωδαιτικών δικτύων, ζητείται και ο προσδιορισμός εκτιμήσεων για επιπλέον παραμέτρους (βλ. π.χ., Ρωσσικόπουλος 1992, Δερμάνης κ.ά. 1993, Φωτίου 2007). Τέτοιες επιπλέον άγνωστες παράμετροι είναι οι συντεταγμένες των κορυφών ενός δικτύου, οι οποίες δεν παρατηρούνται άμεσα, όπως οι παρατηρούμενες παράμετροι γωνιών και αποστάσεων με τα συνήθη κλασικά όργανα, αλλά συνδέονται με αυτές με εξισώσεις που απαρτίζουν το λεγόμενο ***μαθηματικό ή συναρτησιακό μοντέλο*** (***mathematical/ functional model***). Μια τέτοια εξίσωση θα ήταν π.χ. η έκφραση της απόστασης συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων (Πυθαγόρειο θεώρημα). Μαθηματικό μοντέλο αποτελούν και οι εξισώσεις που συνδέουν μεταξύ τους μόνον τις παρατηρούμενες παραμέτρους, π.χ. σε ένα τρίγωνο που παρατηρούνται οι τρείς γωνίες του η αντίστοιχη εξίσωση θα είναι $A + B + \Gamma = \pi$. Γενικότερα, στην έννοια του μαθηματικού μοντέλου περιλαμβάνεται και το λεγόμενο ***στοχαστικό μοντέλο*** (***stochastic model***) το οποίο περιγράφει συνολικά την συμπεριφορά των (τυχαίων) σφαλμάτων ή ισοδύναμα των ίδιων των παρατηρήσεων.

Όταν μελετάμε ένα φυσικό σύστημα θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σύνολο κατάλληλων παραμέτρων περιγραφής και ένα κατάλληλο μαθηματικό (και στοχαστικό) μοντέλο, ώστε κάθε άλλη παράμετρος του συστήματος να μπορεί να προσδιοριστεί από αυτές. Για παράδειγμα, εάν το φυσικό μας σύστημα είναι η μελέτη του σχήματος και του μεγέθους ενός τριγώνου, αρκεί να επιλεγούν ως παράμετροι περιγραφής μία πλευρά και οι δύο παρακείμενες γωνίες (υπάρχουν και άλλες ισοδύναμες επιλογές, π.χ. δύο πλευρές και η περιεχομένη γωνία), ώστε κάθε άλλη παράμετρος του τριγώνου, π.χ. υπόλοιπες πλευρές και γωνίες, εμβαδόν, ύψη κ.α., να μπορούν να προσδιορίζονται από αυτές. Ο ελάχιστος αριθμός παραμέτρων (εδώ 3) εκφράζει την ***έννοια του παραμετρικού βαθμού***, ενώ με τη διαφορά του παραμετρικού βαθμού από τον αριθμό των παρατηρήσεων, π.χ. εάν μετρηθούν δύο πλευρές και οι τρείς γωνίες στο τρίγωνο, εκφράζονται οι ***βαθμοί ελευθερίας*** (***degrees of freedom***, εδώ 5-3=2 βαθμοί ελευθερίας), δηλαδή ο αριθμός των επιπλέον παρατηρήσεων (πλεονάζουσα πληροφορία).

Η εκμετάλλευση της πλεονάζουσας πληροφορίας με έναν βέλτιστο τρόπο (επιλογή κριτηρίων βελτιστοποίησης) οδηγεί σε ***βέλτιστη εκτίμηση παραμέτρων*** (***best parameter estimation***) μέσα από μια ανάλυση και επεξεργασία που ονομάζεται ***συνόρθωση παρατηρήσεων και εκτίμηση παραμέτρων*** (***adjustment of observations and parameter estimation***). Ως κριτήριο βελτιστοποίησης στις επιστήμες της Τοπογραφίας, Γεωδαισίας (και άλλες συγγενείς) χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά το ***κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων*** (***least squares criterion***) των σφαλμάτων, από όπου και η ορολογία μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων για τις μεθόδους συνόρθωσης των παρατηρήσεων (βλ. π.χ., Δερμάνης και Φωτίου 1992). Με βάση το κριτήριο αυτό, ανάμεσα σε άπειρες θεωρητικά λύσεις, αναζητείται η μία και μοναδική που ελαχιστοποιεί τα τετράγωνα των σφαλμάτων των παρατηρήσεων. Βασικός λόγος για την επιλογή του παραπάνω κριτηρίου είναι η μαθηματική απλότητα, που χαρακτηρίζει την παραπέρα επεξεργασία, σε σχέση με άλλα κριτήρια και ο ρεαλισμός της επιλογής με την έννοια ότι προκύπτουν και ρεαλιστικά αποτελέσματα στην πράξη.

Για τον προσδιορισμό εκτιμήσεων παραμέτρων με βάση το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων δεν απαιτείται καμμία υπόθεση για το χαρακτήρα των σφαλμάτων, απλά θεωρούμε ότι αυτά έχουν μικρές τιμές και την τάση αλληλοαναίρεσης σε πολλές επαναλήψεις των μετρήσεων (του πειράματος).

Κατά την επεξεργασία των παρατηρήσεων, είναι λογικό να λάβουμε υπόψη την "αξία" της κάθε παρατήρησης, αυτό που ονομάζεται ***βάρος*** (***weight***) παρατήρησης, δηλαδή το πόσο επηρεάζει η κάθε παρατήρηση, σε σχέση μα τις υπόλοιπες, την εκτίμηση των διαφόρων παραμέτρων. Τα βάρη είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί και υπάρχουν τρόποι να προσδιοριστούν. Ακόμα θα μπορούσε να ληφθεί υπόψη και η συσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων εφόσον υπάρχει (το πόσο μεταβάλλεται η μία συναρτήσει της μεταβολής της άλλης). Είναι ρεαλιστικό τα βάρη να συνδεθούν με την ακρίβειά των αντιστοίχων παρατηρήσεων, δηλαδή με τις αντίστοιχες μεταβλητότητες ή τυπικές αποκλίσεις.

Σύμφωνα με ένα γενικότερο κριτήριο βελτιστοποίησης που οδηγεί σε εκτιμήσεις με την ελάχιστη δυνατή μεταβλητότητα (δηλαδή με την μέγιστη δυνατή ακρίβεια), το βάρος ενός σφάλματος ή της αντίστοιχης παρατήρησης λαμβάνεται ίσο με το αντίστροφο της μεταβλητότητας ($p = 1/\sigma^2$) . Γενικότερα, ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων (συνολικά για όλες τις παρατηρήσεις) λαμβάνεται ίσος με τον αντίστροφο πίνακα των συμμεταβλητοτήτων. Οι ***βέλτιστες γραμμικές ανεπηρέαστες εκτιμήσεις*** (***Best Linear Unbiased Estimations, BLUE***) είναι αυτές που προσδιορίζονται από μία μέθοδο συνόρθωσης παρατηρήσεων.

Για να εκτιμηθεί η ποιότητα οποιασδήποτε παραμέτρου είναι απαραίτητη η εφαρμογή του λεγόμενου νόμου μετάδοσης των σφαλμάτων ή καλύτερα του νόμου μετάδοσης των συμμεταβλητοτήτων. Για να γίνει αυτό δυνατό, τα σφάλματα των παρατηρήσεων χαρακτηρίζονται ως τυχαία με μηδενική προσδοκία (μηδενική μέση τιμή σε θεωρητικά άπειρο δείγμα) και γνωστό ή κατά εκτίμηση γνωστό πίνακα συμμεταβλητοτήτων.

Εάν στο παράδειγμα της μέτρησης της απόστασης θεωρήσουμε ότι κάθε μία παρατήρηση έχει διαφορετικό βάρος p, δηλαδή p_1, p_2, ..., p_n, η μέση τιμή θα δίνεται από τον λεγόμενο κεντροβαρικό μέσο όρο

$$\overline{S} = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2 + ... + p_n\, d_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum p_i d_i}{\sum p_i} \qquad (5)$$

όπου, τα βάρη των παρατηρήσεων λαμβάνονται ως τα αντίστροφα των μεταβλητοτήτων τους. Επισημαίνεται ότι αντί του συμβολισμού $\overline{S}$ θα μπορούσε ισοδύναμα να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $\hat{S}$ που είναι και γενικότερος για κάθε εκτίμηση παραμέτρου.

Η μέση τιμή (3) και ο κεντροβαρικός μέσος όρος (5) αποτελούν βέλτιστες εκτιμήσεις για την παρατηρούμενη παράμετρο της απόστασης S με βάση τις πλεονάζουσες παρατηρήσεις d_i με εφαρμογή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων των σφαλμάτων.

Εκτός από τον προσδιορισμό εκτιμήσεων για διάφορες παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν (ανάμεσά τους και οι παρατηρούμενες παράμετροι) απαιτείται και η αξιολόγηση της ποιότητάς τους, συνήθως μέσω της εφαρμογής στατιστικών ελέγχων υποθέσεων και προσδιορισμού διαστημάτων ή περιοχών εμπιστοσύνης (βλ. π.χ. Καλτσίκης κ.ά. 1994, Δερμάνης κ..α. 1993). Το μέρος αυτό αφορά στον έλεγχο της αξιοπιστίας και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Για να γίνουν οι στατιστικοί έλεγχοι απαιτείται η γνώση της κατανομής των (τυχαίων) σφαλμάτων. Για λόγους μαθηματικής απλότητας αλλά και ρεαλισμού επιλέγεται η ***κανονική κατανομή*** (normal distribution, κατανομή Gauss).

Επισημαίνεται ότι οι στατιστικοί έλεγχοι δεν οδηγούν πάντοτε σε σωστές αποφάσεις και σε κάθε περίπτωση η λήψη μιας στατιστικής απόφασης με βάση το διαθέσιμο δείγμα γίνεται με κάποιον κίνδυνο (ρίσκο), που εκφράζεται από κάποια πιθανότητα (***λάθη του τύπου-I και του τύπου-II***). Στην πράξη δίνεται συνήθως βάρος στο λάθος του τύπου-I, ότι δηλαδή κακώς απορρίψαμε μια υπόθεση που ελέγχεται ενώ στην πραγματικότητα είναι σωστή και θα έπρεπε να γίνει αποδεκτή, με πιθανότητα α, (***συντελεστής ή επίπεδο σημαντικότητας***, ***significance level***) συμβατικά ίση με τιμές που κυμαίνονται από $\alpha = 0.001$ ή 0.1% έως $\alpha = 0.05$ ή 5%. Η συμπληρωματική πιθανότητα (1-α) ονομάζεται ***επίπεδο εμπιστοσύνης*** (***confidence***

level). Σημειώνεται ότι το λάθος του τύπου-ΙΙ (πιθανότητα β ή β%, συνήθως $\beta = 0.10$ έως $\beta = 0.30$) εκφράζει το λάθος ότι κακώς δεν απορρίψαμε (δηλαδή δεχθήκαμε) την H_o η οποία στην πραγματικότητα είναι λάθος. Η πιθανότητα (1-β) ονομάζεται ισχύς ελέγχου.

Κάθε στατιστική υπόθεση, που θεωρούμε ότι ισχύει εκ των προτέρων, π.χ. τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι τυχαία (όχι συστηματικά και χονδροειδή), ελέγχεται για την ορθότητά της. Διαμορφώνεται, δηλαδή, η λεγόμενη μηδενική υπόθεση H_o (null hypothesis) έναντι μιας εναλλακτικής H_a (alternative) που πιθανώς ισχύει σε περίπτωση που απορριφθεί η μηδενική με βάση τον στατιστικό έλεγχο. Δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν στην πραγματικότητα μία υπόθεση που ελέγχεται είναι σωστή ή λάθος (Πίνακας 1). Η μη απόρριψη της H_o δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι στην πραγματικότητα είναι σωστή αλλά ότι τα διαθέσιμα δεδομένα δεν μπορούν να μας πείσουν για την απόρριψή της. Το μέγεθος του κινδύνου που επιθυμούμε να αναλάβουμε είναι ζήτημα επιλογής (σύμβασης) ανάλογα με την κρισιμότητα της απόφασης στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Πίνακας 1: *Στατιστικές αποφάσεις και λάθη.*

Στατιστικός έλεγχος	**Αληθινή κατάσταση της H_o**	
Στατιστική απόφαση	H_o σωστή	H_o λάθος
Απόρριψη της H_o	Λάθος τύπου - Ι (πιθανότητα α)	Σωστή απόφαση
Μη απόρριψη της H_o	Σωστή απόφαση	Λάθος τύπου - ΙΙ (πιθανότητα β)

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι λήψη μιας απόφασης και με τη σιγουριά του 100% δεν υπάρχει στον πραγματικό κόσμο όταν τα αποτελέσματά μας βασίζονται σε μετρήσεις ή παρατηρήσεις.

2.2 Είδη Σφαλμάτων

Για λόγους καλύτερης κατανόησης, παραδοσιακά τα σφάλματα διακρίνονται σε τρείς βασικές κατηγορίες: στα ***χονδροειδή σφάλματα ή λάθη*** (***gross errors***, ***outliers***, ***blunders***, ***mistakes***), στα ***συστηματικά σφάλματα*** (***systematic errors***) και στα ***τυχαία σφάλματα*** (***random errors***). Τα όρια μεταξύ αυτών των κατηγοριών δεν είναι πάντοτε σαφή ή και είναι αδύνατον να τα διακρίνουμε. Για αυτόν το λόγο χρησιμοποιείται εναλλακτικά και ο όρος "***σφάλμα μοντέλου***". Στη διεθνή βιβλιογραφία αρκετοί θεωρούν ότι στην έννοια σφάλμα (error) συμπεριλαμβάνονται μόνον τα συστηματικά και τα τυχαία, εξαιρουμένων των χονδροειδών (βλ. π.χ. Buckner 1997 – 1998).

Τα ***χονδροειδή σφάλματα*** ή ***λάθη*** οφείλονται σε σκόπιμη ή μη άγνοια ενδεδειγμένων μεθοδολογιών και τεχνικών μέτρησης και επεξεργασίας των παρατηρήσεων, σε απροσεξία ή και σε λάθος πληροφορίες, δηλαδή κυρίως σε ανθρώπινα λάθη. Μία σκόπευση σε λάθος σημείο, αναγραμματισμοί κατά την ανάγνωση ή καταγραφή μετρήσεων, λάθη πληκτρολόγησης, λάθη αναγωγών και διόρθωσης παρατηρήσεων, αποτελούν συνήθεις πηγές χονδροειδών σφαλμάτων. Το πλήθος τους είναι μικρό και εάν το μέγεθός τους είναι σχετικά μεγάλο (πρακτικά αρκετές φορές μεγαλύτερο από την ακρίβεια της μέτρησης), εύκολα μπορούν να εντοπισθούν και να απομακρυνθούν κατά την προεπεξεργασία των μετρήσεων. Στην προσπάθεια αυτή βοηθούν σημαντικά οι λεγόμενοι εμπειρικοί έλεγχοι, όπως είναι το σφάλμα κλεισίματος των υψομετρικών διαφορών ή των συνιστωσών των βάσεων GPS σε έναν βρόγχο, οι γραμμικές και γωνιακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα, κλπ. Οι όποιοι προέλεγχοι δεν μας εξασφαλίζουν ότι δεν έχουν εναπομείνει κάποια σημαντικά σφάλματα και γι' αυτό απαιτούνται εξειδικευμένες τεχνικές ελέγχου, συνήθως ***στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων*** (***statistical tests***, ***hypothesis testing***), με όχι πάντα επιτυχή αποτελέσματα.

Τα ***συστηματικά σφάλματα*** είναι εκείνα που γενικώς ακολουθούν κάποιο μαθηματικό ή φυσικό νόμο. Οφείλονται κυρίως στις συνθήκες του περιβάλλοντος, π.χ. επίδραση θερμοκρασίας, πίεσης, υγρασίας, περιεκτικότητας φορτισμένων σωματιδίων στην ταχύτητα όπως είναι το σφάλμα οριζοντίωσης καθώς και στη μη βαθμονόμηση των οργάνων μέτρησης. Μία μεταλλική μετροταινία η οποία έχει διασταλεί λόγω μόνιμης παραμόρφωσης ώστε το ονομαστικό της μήκος αντί 50 m να είναι 50.02 m, μετρά αποστάσεις που είναι συστηματικά μικρότερες. Η αγνόηση της επίδρασης της τροπόσφαιρας στο δορυφορικό σήμα GPS οδηγεί σε συστηματικά μικρότερου μήκους ψευδοαποστάσεις. Παρόμοια, αν αγνοηθούν οι αναγωγές των παρατηρήσεων στην επιφάνεια αναφοράς, όπως είναι για παράδειγμα οι αναγωγές των αποστάσεων στο προβολικό επίπεδο, υπεισέρχονται συστηματικά σφάλματα ανάλογα και με το μέγεθος των παρατηρήσεων. Τα συστηματικά σφάλματα εάν μπορούν να προσδιοριστούν εκ των προτέρων τότε οι αντίστοιχες παρατηρήσεις διορθώνονται πριν από την τελική τους επεξεργασία αλλά παραμένοντας πάντοτε κάποιο υπόλοιπο σφάλμα, κυρίως τυχαίου χαρακτήρα. Στην αντίθετη περίπτωση που δεν μπορούν να υπολογισθούν εκ των προτέρων, επειδή π.χ. εξαρτώνται από κάποιες άγνωστες παραμέτρους, η επίδρασή τους εισάγεται μέσω κάποιας μαθηματικής έκφρασης στο αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο όπου και προσδιορίζονται μαζί με τις υπόλοιπες παραμέτρους. Το συστηματικό σφάλμα αναφέρεται και ως ***bias*** δίνοντας έμφαση στο συνολικό του μέγεθος και εκφράζοντας τη διαφορά μιας εκτίμησης παραμέτρου, που προέκυψε από μία σειρά μετρήσεων, από την πραγματική της τιμή.

Τα **τυχαία σφάλματα** είναι εκείνα που δεν είναι ούτε χονδροειδή ούτε συστηματικά και είναι αναπόφευκτα. Μέτρηση χωρίς (τυχαίο) σφάλμα δεν υπάρχει. Συνήθεις πηγές τυχαίων σφαλμάτων είναι ο ανθρώπινος παράγοντας που συμμετέχει στη διαδικασία της μέτρησης (προσωπικά σφάλματα), το περιβάλλον των μετρήσεων, οι κατασκευαστικές ατέλειες των οργάνων και υπολογιστικά σφάλματα όπως είναι τα σφάλματα στρογγύλευσης. Τα τυχαία σφάλματα έχουν κατά κανόνα μικρό μέγεθος και την τάση να αλληλοαναιρούνται σε μεγάλο πλήθος μετρήσεων επειδή εμφανίζονται στο ίδιο σχεδόν ποσοστό με αντίθετο πρόσημο. Δεν μπορούν ποτέ να διορθωθούν ή να απαλειφτούν παρά μόνο να εκτιμηθούν με τρόπο που να έχουν τη μικρότερη δυνατή επίδραση (έλεγχος), με βάση κάποιο κριτήριο ελαχιστοποίησης όπως είναι το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Βασικό χαρακτηριστικό των τυχαίων σφαλμάτων είναι η "απρόβλεπτη" συμπεριφορά για κάθε ένα από αυτά. Για παράδειγμα, όσες φορές και αν μετρήσουμε την ίδια απόσταση με το ίδιο όργανο, τον ίδιο παρατηρητή, την ίδια μέθοδο και τις ίδιες περιβαλλοντικές συνθήκες, θα βρίσκουμε διαφορετική τιμή παρατήρησης. Παρόλο που δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη για μία μεμονωμένη τιμή ενός σφάλματος, η συμπεριφορά του συνόλου των τιμών τους μπορεί να είναι προβλέψιμη αν ανατρέξουμε στη θεωρία των πιθανοτήτων όπου αναφερόμαστε σε πιθανότητα εμφάνισης ενός εύρους τιμών τους.

Στην επεξεργασία των παρατηρήσεων, π.χ. σε μία συνόρθωση παρατηρήσεων, υποθέτουμε πάντα ότι τα σφάλματα είναι τυχαία, εξαιρώντας τα χονδροειδή και τα συστηματικά. Με παρατηρήσεις που προέρχονται από κλασικά τοπογραφικά και γεωδαιτικά όργανα (θεοδόλιχοι, ταχύμετρα, χωροβάτες, total stations, EDM) το πρόβλημα στην επεξεργασία εντοπίζεται κυρίως στην ελαχιστοποίηση της επίδρασης των (αναπόφευκτων) τυχαίων σφαλμάτων επειδή λόγω της καλής ποιότητας των μετρητικών οργάνων και σε συνδυασμό με κατάλληλες τεχνικές μετρήσεων τα συστηματικά σφάλματα συνήθως δεν υπάρχουν. Υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν και τα χονδροειδή, τα οποία ευκολότερα μπορούν να ανιχνευθούν και να εντοπιστούν. Αντίθετα, με τα σύγχρονα όργανα, όπως είναι οι παρατηρήσεις δεκτών GNSS (GPS, GLONASS), το κύριο πρόβλημα αποτελούν τα συστηματικά σφάλματα (βλ. π.χ., Φωτίου και Πικριδάς, 2012) που πάντοτε υπάρχουν και οφείλονται π.χ. στην επίδραση της ατμόσφαιρας στο δορυφορικό σήμα, στην επίδραση του πεδίου βαρύτητας και της περιστροφής της γης, στην επίδραση των παλιρροιών λόγω σελήνης, κ.ά. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία στη διαχείριση και την εκτίμησή τους.

Το μέγεθος των σφαλμάτων δεν υποδηλώνει αναγκαστικά και το είδος τους. Για παράδειγμα, έστω μία απόσταση που μετρήθηκε με μετροταινία από έναν παρατηρητή ως 45.34 m και καταγράφηκε ως 45.43 m (αναριθμητισμός). Προφανώς έχει γίνει ένα χονδροειδές σφάλμα της τάξης των 9 cm. Η ίδια απόσταση έστω ότι μετράται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές οι οποίοι επιμελώς τη μετρούν και την καταγράφουν ως 45.34 m και 45.43 m αντιστοίχως. Η ίδια πάλι διαφορά των 9 cm μπορεί τώρα να ερμηνευτεί οτι οφείλεται σε τυχαίο σφάλμα εφόσον κρίνεται αποδεκτή με βάση κάποια πρότυπα/μέτρα ή προδιαγραφές/οδηγίες που έχουν τεθεί εκ των προτέρων. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει μία επιπλέον μέτρηση και δίνεται η δυνατότητα κάποιου ελέγχου. Με περισσότερες μετρήσεις ο έλεγχος γίνεται περισσότερο αποτελεσματικός και επιπλέον αυξάνει η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

3. Αβεβαιότητα, ακρίβεια και αξιοπιστία

Η έννοια της αβεβαιότητας είναι γνωστή από την καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Στις τοπογραφικές και γεωδαιτικές εφαρμογές, όπως είναι η μέτρηση και η συνόρθωση των δικτύων, η ανάλυση και η επεξεργασία δεδομένων για την εκτίμηση επιπέδων εμπιστοσύνης βασίζεται στη στατιστική ανάλυση και τη θεωρία των πιθανοτήτων. Βεβαιότητα στον πραγματικό κόσμο δεν υπάρχει, η αβεβαιότητα είναι η πραγματικότητα.

Για να περιγράψουμε τη συλλογική συμπεριφορά των τυχαίων σφαλμάτων θα επιστρέψουμε στο παράδειγμα της μέτρησης της απόστασης S όπου θα θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν συστηματικά και χονδροειδή σφάλματα, παρά μόνον τα αναπόφευκτα τυχαία. Εάν μετρήσουμε πολλές φορές την απόσταση με τις ίδιες συνθήκες παρατήρησης θα δούμε ότι αυτές, στην συντριπτική τους πλειοψηφία, διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους και ότι κάποιες τιμές εμφανίζονται περισσότερες φορές σε σχέση με άλλες.

Το πόσο κοντά (βαθμός εγγύτητας) μεταξύ τους βρίσκονται οι παρατηρήσεις μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά από τη λεγόμενη ***διασπορά*** m^2 του δείγματος (***dispersion***), από τη σχέση

$$m^2 = \frac{1}{n}\sum(d_i - \hat{S})^2 = \frac{1}{n}\sum \hat{v}_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

όπου $\hat{S}$ η εκτίμηση της μέσης τιμής του δείγματος ((3) ή (5)) και με τη ρίζα m να ονομάζεται ***μέση τυπική απόκλιση*** (***mean standard deviation***) ή **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** (***root mean square error***, rmse) εφόσον όμως θεωρήσουμε ότι η μέση τιμή ταυτίζεται με την πραγματική τιμή (δεν υπάρχουν δηλαδή συστηματικά σφάλματα ούτε χονδροειδή).

Αν υπολογίσουμε τις (σχετικές) συχνότητες εμφάνισης των διαφόρων τιμών και δημιουργήσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα συχνοτήτων – ραβδόγραμμα ή ιστόγραμμα – θα παρατηρήσουμε ότι για μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων το διάγραμμα τείνει στη γνωστή κωδωνοειδή καμπύλη της κανονικής κατανομής. Ως συχνότητα εμφάνισης μιας τιμής ορίζεται το πηλίκο 'αριθμός εμφάνισης /συνολικός αριθμός παρατηρήσεων'. Για θεωρητικά άπειρο πλήθος μετρήσεων οι συχνότητες εμφάνισης τείνουν σε σταθερά όρια τα οποία εκφράζουν τις αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης. Έτσι, αντί των ιστογραμμάτων μπορούμε, για το άπειρο δείγμα, να χρησιμοποιήσουμε ένα ρεαλιστικό θεωρητικό μαθηματικό μοντέλο, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής για την συνεχή τυχαία μεταβλητή της παρατηρούμενης παραμέτρου (βλ. π.χ. Mikhail and Gracie 1981, Δερμάνης 1986). Ως τυχαία μεταβλητή ορίζεται η μεταβλητή που για κάθε σύνολο τιμών της είναι γνωστή η πιθανότητα εμφάνισης. Το εμβαδόν ενός τμήματος κάτω από τη συνεχή καμπύλη της συνάρτησης και για ένα (μη μηδενικό) διάστημα μεταξύ δύο τιμών του άξονα των τετμημένων εκφράζει την πιθανότητα εμφάνισης η τυχαία μεταβλητή να πάρει τιμές στο διάστημα αυτό.

Στην πράξη βέβαια οι μετρήσεις δεν είναι άπειρες, το πείραμα γίνεται συνήθως μία φορά (μία σειρά μετρήσεων) και θεωρούμε ότι οι πιθανότητες εμφάνισης που ισχύουν για το άπειρο δείγμα είναι ίδιες και για το συγκεκριμένο δείγμα. Σε προβλήματα με περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, π.χ. σε ένα δίκτυο να έχουμε μετρήσει 10 αποστάσεις και 20 γωνίες (30 τυχαίες μεταβλητές), αναφερόμαστε σε συλλογικές συναρτήσεις κατανομής που περιγράφουν συνολικά τη στοχαστική συμπεριφορά τους, όπως είναι η πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

Για το ***άπειρο δείγμα*** η **μέση τιμή** μ ονομάζεται ***προσδοκία*** (***expectation***, ***E***) της τυχαίας μεταβλητής και η διασπορά ονομάζεται ***μεταβλητότητα*** (***variance***) σ^2. Η τετραγωνική ρίζα (σ) της μεταβλητότητας λέγεται ***τυπική απόκλιση*** (***standard deviation***). Η κανονική κατανομή εκφράζεται από μία εκθετική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους τη μέση τιμή μ και την μεταβλητότητα σ^2.

Επειδή για το άπειρο δείγμα η μέση τιμή μ και η μεταβλητότητα σ^2 είναι στην πραγματικότητα άγνωστες (αν και σε κάποιες περιπτώσεις θεωρούνται ως απολύτως γνωστές), στη θέσης τους χρησιμοποιούνται οι ανεπηρέαστε εκτιμήσεις που εκφράζονται από τη (δειγματική) μέση τιμή, π.χ. $\hat{S}$, και από την ***δειγματική μεταβλητότητα*** (εκτίμηση της σ^2), που δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(d_i - \hat{S})^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma\hat{v}_i^2 \;, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

με τη διαφορά (n-1) να εκφράζει του βαθμούς ελευθερίας (πλεονάζουσες μετρήσεις). Σημειώνεται ότι ***ανεπηρέαστη*** ή ***αμερόληπτη εκτίμηση*** (***unbiased estimation***) μιας παραμέτρου σημαίνει ότι η προσδοκία της ισούται με την πραγματική της τιμή, δηλαδή $E\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2$. Πρακτικά όσο αυξάνει το πλήθος των μετρήσεων τόσο η εκτίμηση πλησιάζει την πραγματική τιμή.

Αποδεικνύεται ότι εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων για να προσδιορίσουμε την ακρίβεια της εκτίμησης $\hat{S}$, στη σχέση (3) με ισοβαρείς παρατηρήσεις, όπου όλες οι παρατηρήσεις έχουν το ίδιο βάρος ή την ίδια γνωστή μεταβλητότητα σ^2 ή στη σχέση (5) με ανισοβαρείς παρατηρήσεις, προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις

$$\hat{\sigma}_{\hat{S}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{8}$$

ή

$$\hat{\sigma}_{\hat{S}}^2 = \frac{1}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{1}{\sum p_i} \tag{9}$$

Στις (8) και (9) όσο αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων μειώνεται η εκτίμηση της μεταβλητότητας (εσωτερική ακρίβεια) και μάλιστα απεριόριστα. Στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν ισχύει και υπάρχει κάποιο όριο σταθεροποίησης πέρα από το οποίο η μείωση είναι ονομαστική. Ο λόγος είναι ότι πάντα θα υπάρχουν και κάποια εναπομείναντα συστηματικά σφάλματα σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος μετρήσεων λόγω της μεταβολής των συνθηκών παρατήρησης, π.χ. των συνθηκών περιβάλλοντος. Εάν θεωρήσουμε την πιο ρεαλιστική υπόθεση ότι δεν γνωρίζουμε την απόλυτη ακρίβεια των παρατηρήσεων αλλά τη σχετική, δηλαδή, $\sigma_i^2 = \sigma^2 q_i$ με τη μεταβλητότητα αναφοράς σ^2 άγνωστη και q_i γνωστούς θετικούς αριθμούς, τότε θεωρώντας ως βάρη τις ποσότητες $p_i = 1/q_i$ αποδεικνύεται ότι

$$\hat{\sigma}_{\hat{S}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum p_i} = \frac{1}{n-1} \frac{\sum p_i \hat{v}_i^2}{\sum p_i} \tag{10}$$

Για την κανονική κατανομή (άπειρο δείγμα) το 68.26% των μετρήσεων θα βρίσκονται στο διάστημα (μ–σ, μ+σ), το 95.44% στο διάστημα (μ–2σ, μ+2σ) ενώ το 99.74% στο διάστημα (μ–3σ, μ+3σ). Τα διαστήματα αυτά ονομάζονται διεθνώς ως "one sigma", "two sigma", "three sigma" ή 1σ, 2σ, 3σ. Τα ποσοστά εκφράζουν τις αντίστοιχες πιθανότητες να προκύψει τιμή στο αντίστοιχο διάστημα. Για τις εκτιμήσεις των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων ισχύουν ανάλογα διαστήματα εμπιστοσύνης λαμβάνοντας υπόψη ότι η προσδοκία τους είναι μηδενική, μ = 0. Είναι φανερό ότι τιμές σφαλμάτων εκτός του διαστήματος (–3σ, +3σ) μπορούν να υπάρξουν (θεωρητικά ακόμα και απείρου μεγέθους!) αλλά έχουν πολύ μικρή πιθανότητα, ίση με 1–0.9976 = 0.0026 ή 0.26%. Αυτός είναι ο λόγος που μερικές φορές χρησιμοποιείται ο εμπειρικός κανόνας "three sigma rule" που οδηγεί στην απόρριψη παρατηρήσεων με εκτίμηση σφάλματος μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της τυπικής τους απόκλισης.

Η μετάδοση των (τυχαίων) σφαλμάτων, γνωστή και ως ***νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων*** (***error propagation***) ή γενικότερα ως ***νόμος μετάδοσης των συμμεταβλητοτήτων*** (***covariance propagation***) (βλ. π.χ. Δερμάνης 1986, Δερμάνης και Φωτίου 1992) παίζει καθοριστικό ρόλο στην εκτίμηση της επίδρασης των τυχαίων σφαλμάτων σε κάθε εκτίμηση που προσδιορίζεται. Έτσι, είναι δυνατή η μελέτη της ποιότητας των εκτιμήσεων, π.χ. των συντεταγμένων των κορυφών ενός δικτύου, τόσο στο στάδιο του σχεδιασμού όσο και στο στάδιο της συνόρθωσης. Στο στάδιο του σχεδιασμού υποθέτουμε ότι τα σφάλματα έχουν μόνον τυχαίο χαρακτήρα ενώ στη συνόρθωση η υπόθεση αυτή ελέγχεται στατιστικά εκ των υστέρων.

Η μετάδοση των τυχαίων σφαλμάτων σε μία εκτίμηση σημαίνει «άθροιση» των επιμέρους σφαλμάτων που επιδρούν, όχι όμως αλγεβρική άθροιση όπως για παράδειγμα θα συνέβαινε με την εκτίμηση ενός συστηματικού σφάλματος (βλ. π.χ. Φωτίου 2007). Τα συστηματικά σφάλματα συσσωρεύονται ενώ τα τυχαία τείνουν να εξισορροπηθούν, να αντισταθμιστούν, επειδή το ίδιο μέγεθος τείνει να εμφανίζεται και με θετική και με αρνητική τιμή.

Αν μετρήσουμε μία απόσταση s = 300 m με μία μετροταινία ονομαστικού μήκους d=30 m, δηλαδή μετρήσουμε διαδοχικά 10 τμήματα των 30 m, με τυπική απόκλιση (εσωτερική ακρίβεια) σ = ±1 cm, τότε για την τυπική απόκλιση της απόστασης των 300 m, με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης θα έχουμε,

$$s = d + d + \ldots + d, \quad \sigma_s^2 = \sigma_d^2 + \sigma_d^2 \ldots + \sigma_d^2 = 10\sigma^2 \quad \text{και} \quad \sigma_s = \pm\sqrt{10}\,\sigma = \pm 3.2 \text{ cm}.$$

Θα ήταν μεγάλο λάθος να θεωρηθεί s = 10d και να εφαρμοστεί ο νόμος μετάδοσης σε αυτήν τη σχέση, οπότε θα είχαμε $\sigma_s^2 = 10^2\sigma^2$ ή $\sigma_s = \pm\, 10\sigma = 10$ cm, τιμή η οποία θα είχε νόημα μόνον εάν το σφάλμα της μέτρησης ήταν συστηματικό και μάλιστα ίδιου προσήμου. ***Η αλγεβρική πρόσθεση ισχύει για τα συστηματικά σφάλματα και όχι για τα τυχαία***. Η σχέση s = 10d δεν εκφράζει το πώς μετρήθηκε η απόσταση ενώ η σχέση s = d + d + … + d εκφράζει τη μετρητική διαδικασία!

3.1 Ποιοτικός έλεγχος

Τα αποτελέσματα της εκτίμησης παραμέτρων ή γενικότερα μιας επεξεργασίας παρατηρήσεων πρέπει να υφίστανται ***ποιοτικό έλεγχο*** (***quality control***) και να συνοδεύοντα από μέτρα που να εκφράζουν την ποιότητά τους (βλ. π.χ., Ρωσσικόπουλος 1992, Φωτίου 2007). Διαφορετικά δεν έχουν νόημα επειδή γενικά οι εκτιμήσεις δεν ταυτίζονται με τις πραγματικές τους τιμές και είναι άγνωστη η απόκλισή τους από αυτές. Πολλές φορές, ιδίως σε βαθμονομήσεις οργάνων, τίθενται εκ των προτέρων κάποια ***πρότυπα μέτρα*** (***standards***) ή και ***προδιαγραφές/οδηγίες*** (***specifications, guides***) με τα οποία συγκρίνονται οι εκτιμήσεις.

Εκτός από τον προσδιορισμό εκτιμήσεων παραμέτρων (σημειακή εκτίμηση, point estimation), μεγάλη σημασία έχει και η ***εκτίμηση διαστημάτων*** (***interval estimation***). Η εκτίμηση διαστήματος για κάθε παράμετρο σημαίνει ότι υπάρχει συγκεκριμένη πιθανότητα εντός του οποίου βρίσκεται η (άγνωστη) πραγματική τιμή της παραμέτρου. Για μία παράμετρο S η εκτίμηση του διαστήματος γίνεται με τη βοήθεια της εκτίμησης $\hat{S}$ και της κατανομής που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $\hat{S}$ (γνωστή προσδοκία και μεταβλητότητα). Η πιθανότητα επιλέγεται κατά κανόνα εκ των προτέρων, με συνήθεις τιμές $1\text{-}\alpha = 0.95$ ή 0.99. Τα εν λόγω διαστήματα λέγονται και ***διαστήματα εμπιστοσύνης*** (***confidence intervals***) ή και περιοχές εμπιστοσύνης όταν χρειάζεται να περιγραφεί μία περιοχή που να αφορά ταυτόχρονα περισσότερες από μία παραμέτρους, π.χ. τη θέση (x, y) ενός σημείου στο επίπεδο (έλλειψη/κύκλος εμπιστοσύνης) ή (X, Y, Z) στο χώρο (ελλειψοειδές/σφαίρα εμπιστοσύνης). Το διάστημα εμπιστοσύνης για μία παράμετρο προσδιορίζεται με βάση την τυπική απόκλιση της εκτίμησης της παραμέτρου και γενικότερα από τον πίνακα συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των παραμέτρων.

Παρ' όλες τις διορθώσεις (συστηματικά και χονδροειδή σφάλματα) που μπορούν να γίνουν σε μία μέτρηση ή παρατήρηση εξακολουθεί να υπάρχει η αβεβαιότητα ή η αμφιβολία για την εγκυρότητα ή την αξιοπιστία της τιμής της μέτρησης, δηλαδή το ερώτημα το πόσο καλά η μέτρηση αντιπροσωπεύει ή πλησιάζει την πραγματική τιμή της παρατηρούμενης παραμέτρου.

Ορίζεται ως ***αβεβαιότητα μέτρησης*** (***uncertainty of measurement***) το εύρος τιμών ή το διάστημα εμπιστοσύνης εντός του οποίου βρίσκεται η πραγματική τιμή της παρατηρούμενης παραμέτρου για συγκεκριμένη πιθανότητα. Στην αβεβαιότητα συνεισφέρουν όλες οι πιθανές πηγές σφαλμάτων, σφάλματα τυχαίου και συστηματικού χαρακτήρα, σύμφωνα και με τις ***οδηγίες ISO*** (βλ. π.χ., Heister 2001, BIPM-JCGM 2008, Eurolab 2006, NIST/SEMATECH 2012) Γράφοντας, π.χ., για μία μέτρηση απόστασης d = 85.48 m ± 2 cm για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, εννοείται ότι υπάρχει πιθανότητα 95% η πραγματική (άγνωστη) τιμή της παρατηρούμενης παραμέτρου S να περιλαμβάνεται στο διάστημα από 83.48 m έως 87.48 m. Στην εκτίμηση αυτή της αβεβαιότητας συμβάλλουν όλες οι δυνατές επιδράσεις σφαλμάτων, τόσο συστηματικού όσο και τυχαίου χαρακτήρα (εξαιρούνται τα χονδροειδή λάθη). Εάν θεωρήσουμε ως μόνη πηγή τα τυχαία σφάλματα τότε η αβεβαιότητα εκφράζει την εσωτερική ακρίβεια.

Είναι φανερό ότι η ποιότητα των αποτελεσμάτων σχετίζεται με την ικανότητα του μοντέλου συνόρθωσης, μαθηματικού και στοχαστικού, να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις που τίθενται εκ των προτέρων και να περιγράφει με επιτυχία το φυσικό πρόβλημα. Τέτοιες "απαιτήσεις/υποθέσεις" είναι κυρίως ο τυχαίος χαρακτήρας των σφαλμάτων, η ρεαλιστική επιλογή των βαρών των παρατηρήσεων και η ορθότητα των εξισώσεων που αποτελούν το μαθηματικό μοντέλο.

Το μέγεθος της απόκλισης του μοντέλου της συνόρθωσης από την πραγματικότητα ή πρακτικά από αυτό που θεωρείται συμβατικά ως "πραγματικό" εκφράζει την ακρίβεια του μοντέλου. Είναι φανερό ότι ο έλεγχος της ποιότητας είναι ο έλεγχος της ακρίβειας και γι' αυτό ***η έννοια της ποιότητας (quality) είναι σχεδόν ταυτόσημη με την έννοια της ακρίβειας (accuracy)***.

Η ***ακρίβεια*** (***accuracy***), που θα μπορούσε να ονομασθεί και ***εξωτερική ακρίβεια*** (***extrernal accuracy***), εκφράζει το βαθμό εγγύτητας μιας παρατήρησης ως προς την (άγνωστη) πραγματική της τιμή. Η πραγματική τιμή είναι θεωρητικά πάντοτε άγνωστη και συνεπώς η ακρίβεια είναι πάντοτε άγνωστη εκτός εάν ως πραγματική τιμή θεωρηθεί συμβατικά μία γνωστή πρότυπη τιμή αναφοράς ή μία τιμή που προκύπτει από γεωμετρικούς νόμος/κανόνες, π.χ το άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο ή και κάποιες τιμές που προέκυψαν από αναγνωρισμένους φορείς/εργαστήρια, π.χ. οι συντεταγμένες των μόνιμων σταθμών αναφοράς GNSS ενός κρατικού δικτύου. Τονίζεται ότι και οι τιμές αναφοράς έχουν προκύψει από μετρήσεις και θεωρείται συμβατικά ότι ταυτίζονται με τις άγνωστες πραγματικές τους τιμές.

Η ***εσωτερική ακρίβεια*** (***precision, internal accuracy***) μιας εκτίμησης εκφράζει το βαθμό εγγύτητας μεταξύ επαναλαμβανόμενων μετρήσεων της ίδιας παρατηρούμενης παραμέτρου, δηλαδή το πόσο κοντά βρίσκονται μεταξύ τους οι τιμές των μετρήσεων. Η μεταβλητότητα ή η τυπική απόκλιση και τα διαστήματα ή οι περιοχές εμπιστοσύνης αποτελούν συνήθη μέτρα της εσωτερικής ακρίβειας. Μικρή τιμή της τυπικής απόκλισης συνεπάγεται μεγάλη εσωτερική ακρίβεια και αντιστρόφως. Μερικές φορές, μία έκφραση της εσωτερικής ακρίβειας (precision) ονομάζεται ***επαναληψιμότητα*** ή ***επαναληπτικότητα*** (**repeatability**) όταν κάτω από τις ίδιες συνθήκες παρατήρησης (ίδιο όργανο, ίδιος παρατηρητής, ίδιες μέθοδοι και ίδιες περιβαλλοντικές συνθήκες) οι τιμές των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων παραμένουν σχεδόν ίδιες για σχετικά μικρή χρονική διάρκεια. Μία άλλη έκφραση ονομάζεται δυνατότητα αναπαραγωγής ή ***αναπαραξιμότητα*** (***reproducibility***) όταν έχουμε διαφορετικές συνθήκες παρατήρησης (διαφορετικό όργανο, διαφορετικός παρατηρητής, διαφορετική μέθοδος, διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες) και μεγάλο χρονικό διάστημα (long term) (NIST/SEMATECH 2012).

Ακόμα ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων ή των σημαντικών ψηφίων εκφράζει κατά μία έννοια την εσωτερική ακρίβεια. ***Η εσωτερική ακρίβεια εξαρτάται από τη συμπεριφορά των τυχαίων σφαλμάτων***, ***ελέγχει τα τυχαία σφάλματα και όχι τα συστηματικά.*** Μικρές τιμές τυχαίων σφαλμάτων συνεπάγεται μεγάλη εσωτερική ακρίβεια και αντιστρόφως. Η ελάχιστη ανάγνωση στην μετρητική κλίμακα ενός οργάνου ή η διακριτική ικανότητα επηρεάζει προφανώς την εσωτερική ακρίβεια της αντίστοιχης μέτρησης αλλά όχι από μόνη της. Ουσιαστική επίδραση έχει και η μεθοδολογία της μέτρησης.

Μία παρατήρηση/μέτρηση μπορεί να χαρακτηρίζεται από μεγάλη εσωτερική ακρίβεια (precision) αλλά από μικρή ακρίβεια (accuracy). Για παράδειγμα, η μέτρηση μιας απόστασης με ένα ηλεκτρονικό όργανο μπορεί να έχει μια εσωτερική ακρίβεια της τάξης των ±5 mm, όπως προέκυψε από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, αλλά η ακρίβειά της να είναι της τάξης των 3 cm εφόσον το όργανο δεν είναι βαθμονομημένο και αποδειχθεί ότι παρουσιάζει συστηματικό σφάλμα, δηλαδή μετρά συστηματικά μεγαλύτερο ή μικρότερο μήκος κατά 3 cm. Ισχύει και το αντίστροφο. Μπορεί να χρησιμοποιήσουμε ένα όργανο που οδηγεί σε μικρότερη εσωτερική ακρίβεια, π.χ. ±2 cm, αλλά σε μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με το προηγούμενο όργανο επειδή είναι βαθμονομημένο και δεν παρουσιάζει συστηματικό σφάλμα.

Σε έναν χωροσταθμικό βρόγχο το άθροισμα των αντιστοίχων υψομετρικών διαφορών θα πρέπει θεωρητικά να είναι μηδέν. Όμως αν π.χ. σε δύο από τις έστω 4 συνολικά οδεύσεις έχει γίνει συστηματικό σφάλμα +3 cm και –3 cm, η συνθήκη κλεισίματος θα ικανοποιείται στα όρια των τυχαίων σφαλμάτων, δηλαδή μεγάλη εσωτερική ακρίβεια αλλά δύο οδεύσεις/υψομετρικές διαφορές ή τα υψόμετρα δύο κορυφών (αν θεωρήσουμε μία κορυφή με γνωστό υψόμετρο) θα έχουν σημαντικό συστηματικό σφάλμα και συνεπώς θα έχουμε κακή ακρίβεια (accuracy).

Το σφάλμα κλεισίματος μπορεί να ανιχνεύσει και να εντοπίσει και χονδροειδή λάθη και συνεπώς παρέχει έναν μερικό έλεγχο της ακρίβειας. Δεν μπορεί να ελέγξει πλήρως την ακρίβεια εφόσον δεν μπορεί να ελέγξει πλήρως τα συστηματικά λάθη. Παρόμοια ισχύουν, π.χ. για τα γραμμικά σφάλματα κλεισίματος σε μία πολυγωνική όδευση με γνωστά τα άκρα της, όπου τα συστηματικά σφάλματα των αποστάσεων δεν μπορούν να ανιχνευθούν παρά μόνον τα χονδροειδή.

Επισημαίνεται ότι οι όροι εσωτερική ακρίβεια και αβεβαιότητα χρησιμοποιούνται πολλές φορές ως ταυτόσημοι αν και σύμφωνα με τις οδηγίες ISO υπάρχει διαφορά όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Μία άλλη έννοια που συναντάμε στη βιβλιογραφία και είναι παρόμοια με την έννοια της ακρίβειας είναι η ***αληθότητα*** ή ***ορθότητα*** (***trueness***), η οποία εκφράζει το βαθμό εγγύτητας της εκτίμησης της παραμέτρου, από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, από την πραγματική της τιμή (βλ. π.χ., BIPM-JCGM 2008).

Η εσωτερική ακρίβεια ταυτίζεται με την ακρίβεια και αποκτά σημαντική αξία μόνον στην περίπτωση απουσίας συστηματικών (εννοείται και χονδροειδών) σφαλμάτων. Τότε τα μέτρα της εσωτερικής ακρίβειας αποτελούν και μέτρα της ακρίβειας των ανεπηρέαστων ή αμερόληπτων εκτιμήσεων. Συνεπώς θα πρέπει να γίνει έλεγχος για την ανίχνευση και πιθανώς εντοπισμό των συστηματικών και χονδροειδών σφαλμάτων ή απλά των σημαντικών σφαλμάτων του μοντέλου. Με άλλα λόγια, να ελεγχθεί η ισχύς ή η ικανότητα του μοντέλου για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου ύπαρξης επηρεασμένων εκτιμήσεων.

Ο έλεγχος της ορθότητας των υποθέσεων που αρχικά διατυπώνονται για την επιλογή του μοντέλου εκτίμησης παραμέτρων (π.χ. μοντέλο συνόρθωσης τριγωνομετρικού δικτύου), που γίνεται μετά τον προσδιορισμό των εκτιμήσεων των παραμέτρων, εκφράζει την ***αξιοπιστία*** (***reliability***) των διαφόρων εκτιμήσεων. Τότε μόνον τα μέτρα της εσωτερικής ακρίβειας, όπως είναι τα διαστήματα και οι περιοχές εμπιστοσύνης, εκφράζουν και μέτρα της (πραγματικής) ακρίβειας. Οι έλεγχοι αξιοπιστίας είναι συνήθως στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων και πολλές φορές προσδιορίζονται ***μέτρα αξιοπιστίας*** που εκφράζουν τόσο την ***εσωτερική αξιοπιστία (internal reliability)*** από τις ελάχιστες οριακές τιμές των σφαλμάτων για κάθε παρατήρηση που μπορούν να ανιχνευθούν με βάση τους ελέγχους (***marginal detectable errors***, mde), όσο και την ***εξωτερική αξιοπιστία (external reliability)*** από το μέγεθος των επιδράσεων των οριακών μη ανιχνεύσιμων σφαλμάτων σε άλλες εκτιμήσεις παραμέτρων του μοντέλου, όπως είναι οι συντεταγμένες των κορυφών ενός δικτύου (βλ. π.χ. Ρωσσικόπουλος 1992, Φωτίου 2007).

Επικρατεί πολλές φορές η μη σωστή άποψη ότι η συνόρθωση και οι στατιστικοί έλεγχοι αφορούν εργασίες υψηλής ακρίβειας και μικρή αξία έχουν για κάποιες από τις τρέχουσες πρακτικές εφαρμογές, που είναι συνήθως χαμηλότερης ακρίβειας. Και σε αυτές τις περιπτώσεις έχει σημασία να γνωρίζουμε, αν για παράδειγμα σε μία εφαρμογή με ζητούμενη χαμηλή ακρίβεια προσδιορισμού θέσης, π.χ. της τάξης των 30 cm, η επίδραση ύπαρξης πιθανών σφαλμάτων ξεπερνά κατά πολύ τα 30 cm και είναι, π.χ. 1 ή 5 m.

Στις τοπογραφικές και γεωδαιτικές εφαρμογές, το αλγεβρικό/μαθηματικό μοντέλο είναι κατά κανόνα γνωστό και δεν αποτελεί πρόβλημα για πιθανή τροποποίησή του. Ο ποιοτικός έλεγχος αφορά κυρίως την επίδραση και τον έλεγχο των σφαλμάτων των παρατηρήσεων.

3.2 Σημαντικά ψηφία και υπολογισμοί

Μία πρωτογενής μέτρηση που καταγράφεται αρχικά με έναν αριθμό ψηφίων, ακέραιο και δεκαδικό μέρος, συνοδεύεται από μία τιμή με τη μονάδα μέτρησης και την αβεβαιότητά της, με την τελευταία να εκφράζεται από ένα διάστημα ή περιοχή εμπιστοσύνης. Παραπέρα, σε ένα συνθετότερο πρόβλημα, οι πρωτογενείς παρατηρήσεις υφίστανται διορθώσεις και επεξεργασία (π.χ. συνόρθωση) με σκοπό τον υπολογισμό βέλτιστων εκτιμήσεων παραμέτρων. Ακόμα, οι διάφοροι υπολογισμοί που γίνονται μέσω μιας αριθμομηχανής ή συνήθως μέσω ενός λογισμικού επιδρούν στην αρχική καταγραφείσα τιμή και αβεβαιότητα. Ο αριθμός των ψηφίων που εκφράζει μία μέτρηση και είναι συμβατός με την αβεβαιότητα της μέτρησης αποτελούν τα ***σημαντικά ψηφία*** (***significance figures***). Σοβαρά λάθη μπορεί να γίνουν όταν οι μετρήσεις ή και τα παράγωγά τους δεν εκφράζονται από τον σωστό αριθμό των σημαντικών ψηφίων.

Δεν θα πρέπει να γίνεται σύγχυση των 'πραγματικά' σημαντικών ψηφίων με τα όποια ψηφία ή τα δεκαδικά ψηφία με τα οποία μπορεί να καταγραφεί μία μέτρηση. Δύο διαφορετικοί παρατηρητές μπορεί να δίνουν διαφορετική εσωτερική ακρίβεια άρα και αριθμό σημαντικών ψηφίων για το ίδιο παρατηρούμενο μέγεθος. Για παράδειγμα μια ζενίθια γωνία που μετρήθηκε με ένα θεοδόλιχο εσωτερικής ακρίβειας 0.1 mgons πρέπει να καταγραφεί με τέσσερα δεκαδικά, π.χ. ως 125.8236 gons, θεωρώντας επτά σημαντικά ψηφία. Ένας άλλος παρατηρητής αναλύοντας επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, όπου έλαβε υπόψη και τις περιβαλλοντικές συνθήκες, υπολόγισε την τυπική απόκλιση ίση με 1 mgon και κατέγραψε τη μέτρηση με τρία δεκαδικά ψηφία ή έξι αντί επτά σημαντικά ψηφία. Ο δεύτερος παρατηρητής είναι πιο αξιόπιστος επειδή έλαβε υπόψη όλους τους πιθανούς παράγοντες που επιδρούν στη μετρητική διαδικασία. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή, κάθε φορά που προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε την ακρίβεια μιας εκτίμησης μόνον με τον αριθμό των ψηφίων με τα οποία αυτή εκφράζεται. Ας σημειωθεί ότι καταγράφοντας μία τιμή, π.χ. 137.00 αυτή έχει διαφορετική σημασία από την τιμή 137.0 ή την τιμή 137 αν στηριχθούμε μόνο στον αριθμό των ψηφίων.

Η αρχική μέτρηση, για παράδειγμα μιας απόστασης με μία μετροταινία, αν εξαιρέσουμε τις υπόλοιπες επιδράσεις και βασιστούμε μόνο στην κλίμακα υποδιαίρεσης της μετροταινίας, μπορεί να καταγραφεί με (εσωτερική) ακρίβεια της τάξης του 1 mm (τρία δεκαδικά ψηφία) εφόσον η υποδιαίρεση είναι ανά 1 mm ή της τάξης των

0.2 mm εάν εκτιμηθεί και το τμήμα του mm (η διακριτική ικανότητα του ανθρώπινου οφθαλμού είναι της τάξης του 1/4 mm). Το σύνολο των σημαντικών ψηφίων - ψηφίων με αξία- της μέτρησης θα είναι το άθροισμα του αριθμού των ψηφίων του ακέραιου μέρους και του αριθμού των δεκαδικών ψηφίων. Αν καταγραφεί η μέτρηση ως 23.468 mm ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων θα είναι (2+3) = 5. Γενικά, όσο αυξάνει η εσωτερική ακρίβεια ή μειώνεται η αβεβαιότητα της μέτρησης τόσο αυξάνει και ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων. Γενικότερα ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων της τυπικής απόκλισης (αβεβαιότητας) της μέτρησης καθορίζει και τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων της μέτρησης.

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων σε μία πρωτογενή μέτρηση είναι σχετικά εύκολο να βρεθεί βασιζόμενος κυρίως στην (εσωτερική) ακρίβεια του οργάνου μέτρησης. Εάν χρειαστεί κάποια στρογγυλοποίηση αυτή μειώνει προφανώς τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Κατά τα γνωστά, μία μέτρηση απόστασης, π.χ. 23.468 στρογγυλοποιείται στην τιμή 23.47 εάν αρκεί η "ακρίβεια" του εκατοστού και η μέτρηση 23.464 στρογγυλοποιείται στην τιμή 23.46. Αν όμως έχουμε τιμή με το τελευταίο ψηφίο να είναι 5, μία τεχνική είναι να στρογγυλοποιείται στο επόμενο μεγαλύτερο ψηφίο, π.χ. από 23.465 να γίνει 23.47 καταλήγοντας πάντα σε ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή. Μία εξισορροπητική τεχνική είναι να αγνοείται το ψηφίο 5 εφόσον το προηγούμενο ψηφίο είναι άρτιος αριθμός (η τιμή 23.465 να γίνει 23.46) ή να αυξάνει κατά μία μονάδα εφόσον το προηγούμενο ψηφίο είναι περιττός (η τιμή 23.475 να γίνει 23.48). Σημειώνεται ότι απαιτείται προσοχή στη στρογγυλοποίηση μιας ήδη στρογγυλοποιημένης τιμής που το αποτέλεσμά της δεν ταυτίζεται πάντα με την τιμή που θα προέκυπτε με στρογγυλοποίηση σε ένα βήμα.

Σε μία σειρά υπολογισμών όπου συμμετέχουν συνήθως περισσότερες από μία μετρήσεις και χρησιμοποιούνται μαθηματικές εκφράσεις, όπως τετράγωνα, ρίζες, δυνάμεις, λογάριθμοι, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κλπ, δεν είναι εύκολο με απλούς κανόνες να προσδιορίσουμε τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων του τελικού αποτελέσματος, με τη στρατηγική της βήμα προς βήμα διαδοχικής στρογγυλοποίησης των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων στο σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, διακινδυνεύοντας μάλιστα να κάνουμε λάθη. Συνεπώς, η αντιμετώπιση μπορεί να γίνει καταρχάς με τη χρήση μιας κατάλληλης υπολογιστικής μηχανής, μιας αριθμομηχανής με τουλάχιστον 10 θέσεις σημαντικών ψηφίων, χρήση της επιλογής/σημειογραφίας "SCI" (scientific notation) και αποθήκευση ενδιαμέσων αποτελεσμάτων με όλα τα ψηφία. Συνήθως όμως χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικοί υπολογιστές τύπου PC (με 16 ή και περισσότερα σημαντικά ψηφία) και κατάλληλα λογισμικά οπότε στην ουσία δεν μας απασχολεί το πρόβλημα των σημαντικών ψηφίων παρά μόνο στο τελικό αποτέλεσμα, όπου χρειάζεται να γνωρίσουμε την εσωτερική ακρίβειά του ή την αβεβαιότητά του και για να γίνει αυτό πρέπει να εφαρμόσουμε κατάλληλα το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων ή των συμμεταβλητοτήτων (στην εργασία αυτή θεωρούμε ότι είναι γνωστός ο νόμος μετάδοσης). Με την ευκαιρία να σημειωθεί ότι ένα καλό λογισμικό προϋποθέτει και καλή τεχνική υπολογισμών και διαχείρισης αριθμητικών τιμών επειδή και ο υπολογιστής έχει πεπερασμένες δυνατότητες!

Η επιλογή "SCI" (ή και E exponential) προτιμάται επειδή καθορίζει με σαφήνεια τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Σύμφωνα με τον συμβολισμό αυτό, η έκφραση μιας αριθμητικής τιμής θα είναι ($a \times 10^b$) όπου a πραγματικός αριθμός (mantissa) με $1 \leq |a| < 10$ και b ακέραιο. Ο αριθμός των ψηφίων του a ισούται με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Για παράδειγμα, η (δεκαδική) τιμή 3.234500 αν γραφεί με 5 σημαντικά ψηφία θα γίνει 3.2345×10^6, με 6 σημαντικά θα γίνει 3.23450×10^6 και με 7 σημαντικά 3.234500×10^6.

Κάποιοι απλοί κανόνες που βοηθούν στη σωστή διαχείριση και καταγραφή των σημαντικών ψηφίων σε απλούς σχετικά υπολογισμούς δίνονται στη συνέχεια. Στη βιβλιογραφία ο αναγνώστης μπορεί να βρει κανόνες με αρκετές λεπτομέρειες και για σύνθετες περιπτώσεις (χρήση μαθηματικών συναρτήσεων) αλλά χρειάζεται αρκετή προσοχή και βαθειά κατανόηση. Είναι προτιμότερη η εφαρμογή του νόμου μετάδοσης των σφαλμάτων ή των συμμεταβλητοτήτων. Στην ουσία η τεχνική με τα σημαντικά ψηφία που διευκολύνει σε απλές περιπτώσεις την έκφραση της (εσωτερικής) ακρίβειας μιας παραμέτρου, δεν είναι παρά ***μία προσεγγιστική έκφραση του νόμου μετάδοσης*** που βοηθά και εκείνους που δεν γνωρίζουν την εφαρμογή του νόμου.

Προσθέτοντας ή αφαιρώντας μεταξύ τους διάφορες μετρήσεις το άθροισμα που προκύπτει έχει τα ίδια σημαντικά ψηφία με τη μέτρηση που έχει την μικρότερη (εσωτερική) ακρίβεια ή ισοδύναμα με εκείνη που έχει τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Εάν π.χ. προσθέσουμε τις αριθμητικές τιμές 26.156, 67.20, 89.4, 45.5436 το αποτέλεσμα 228.2996 πρέπει να στρογγυλευτεί σε 228.3 μιας και η τιμή 89.4 έχει τον μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Το γινόμενο αριθμητικών τιμών ή το πηλίκο της διαίρεσης χαρακτηρίζεται από τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει η τιμή με τον μικρότερο αριθμό, εξαιρώντας πάντα τις τιμές που χαρακτηρίζονται ως σταθερές ποσότητες, π.χ. σταθεροί συντελεστές σε μια πολυωνυμική σχέση, συντελεστές μετατροπής μονάδων. Έτσι πολλαπλασιάζοντας $823.24 \times 23.1234 \times 9.238$ το γινόμενο θα γραφεί με 4 σημαντικά ψηφία, δηλαδή 1.758×10^5 (εδώ στο τελικό αποτέλεσμα βοηθά έκφραση SCI). Σε ενδιάμεσους απλούς υπολογισμούς χρησιμοποιούμε ένα ψηφίο περισσότερο για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα από τη στρογγύλευση η οποία γίνεται στο τέλος. Μία ελαφρώς σύνθετη περίπτωση είναι η πράξη $\{(83.56 \times 0.467) / (0.00012 \times 6.47)\}$. Το αποτέλεσμα 336.836682122 πρέπει να στρογγυλευτεί στα δύο σημαντικά ψηφία μιας και η τιμή 0.00012 έχει τα λιγότερα (2) σημαντικά ψηφία, δηλαδή θα γραφεί ως 3.4×10^2 ή 340. Η πράξη $(3.0 \times 10^9) / (6.120 \times 10^5) = 0.49019 \times 10^4$ πρέπει να γραφεί ως 4.9×10^3.

Οι σταθερές γενικά δεν στρογγυλοποιούνται αυθαίρετα. Για παράδειγμα, ο αριθμός π=3.141592… στρογγυλεύεται σε τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει το μέγεθος με το οποίο θα πολλαπλασιαστεί (στο εμβαδόν κύκλου θα χρησιμοποιηθούν τόσα σημαντικά (ενδείκνυται πάντα + 1 παραπάνω), όσα έχει η ακτίνα του κύκλου), διαφορετικά κινδυνεύουμε να κάνουμε σοβαρά λάθη. Ο συντελεστής κατεύθυνσης a μιας ευθείας $y = ax + b$ θα εκφραστεί με τόσα σημαντικά όσα η παράμετρος x. Ο συντελεστής αναγωγής μιας απόστασης από το ελλειψοειδές αναφοράς στο προβολικό επίπεδο μιας προβολής, π.χ. της Εγκάρσιας Μερκατορικής, θα γραφεί με τόσα σημαντικά όσα έχει η απόσταση με την οποία πολλαπλασιάζεται.

Η διαχείριση των μηδενικών σε μια τιμή χρειάζεται επίσης προσοχή. Γενικά τα μηδενικά στην αρχή ή στο τέλος των δεκαδικών αριθμών μικροτέρων της μονάδας δεν είναι σημαντικά, π.χ. ο αριθμός 0.000279 έχει την ίδια επίδραση στον αριθμό σημαντικών ψηφίων με τον αριθμό 0.00279 ή 0.270 ή 27.9.

4. Συμπερασματικά σχόλια

Η έννοια του σφάλματος σε συνδυασμό με την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης ή παρατήρησης αποτελεί την πηγή για την αποφυγή παρερμηνειών και λαθών σε θέματα επεξεργασίας μετρήσεων και εκτίμησης παραμέτρων.

Ο πραγματικός κόσμος δεν είναι δυνατόν να γίνει απολύτως γνωστός και πάντοτε θα υπάρχει μια αβεβαιότητα των εκτιμήσεων για διάφορες παραμέτρους που προσδιορίζονται, μια απόκλιση από την άγνωστη πραγματικότητα με βασική επιδίωξη μία ικανοποιητική και ρεαλιστική εκτίμησή της.

Σε ένα πρόβλημα μελέτης ή εφαρμογής ο προσδιορισμός βέλτιστων εκτιμήσεων παραμέτρων επιτυγχάνεται μέσα από μία κατάλληλη επεξεργασία, τη συνόρθωση των παρατηρήσεων με ταυτόχρονο έλεγχο των σφαλμάτων ή γενικότερα έλεγχο του μοντέλου, κυρίως με στατιστικούς ελέγχους, δίνοντας και μέτρα για την ποιότητα των αποτελεσμάτων.

Η κοινή αποδοχή ορισμών και εννοιών μεταξύ των επιστημόνων, ιδιαίτερα μεταξύ των Τοπογράφων Μηχανικών αλλά και ως προς συγγενείς κλάδους επιστημόνων, αποτελεί ουσιαστικό βήμα για εποικοδομητική συνεννόηση, αποφυγή παρερμηνειών και κατά συνέπεια επίλυση ασυμφωνιών ακόμα και σε απλές εφαρμογές της πράξης.

Βιβλιογραφία

BIPM-JCGM: Joint Committee for Guides in Metrology (2008). *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement.*

Buckner B. (1997 to 1998). The Nature of Measurement: Parts 1 to 12. *Professional Surveyor Magazine* (http://www.profsurv.com)

Δερμάνης, Α. (1986). *Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης, Τόμος 1*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 235.

Δερμάνης, Α. και Α. Φωτίου (1992). *Μέθοδοι και εφαρμογές συνόρθωσης παρατηρήσεων*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 348 (ISBN 960-431-156-5).

Δερμάνης, Α., Δ. Ρωσσικόπουλος, Α. Φωτίου (1993). *Τοπογραφικοί Υπολογισμοί και Συνορθώσεις Δικτύων: Ανάλυση προγραμμάτων και παραδείγματα*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 228 (ISBN 960-431-208-1).

Eurolab (2006). Guide to the Evaluation of Measurement Uncertainty for Quantitative Test Results. *Technical Report No. 1/2006*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. P. 50.

Heister, H. (2001). A new concept for standard accuracy in standards – Exemplified by ISO/DIS 17123-6 Rotating Lasers. Int. Conf. FIG Working Week, *New Technology for a New Century*, Seoul, Korea 6-11 May 2001.

Καλτσίκης, Χ.Ι. και Α. Φωτίου (1990). *Γενική Τοπογραφία*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 318 (ISBN 960-431-590-0).

Καλτσίκης, Χ., Ι. Παρασχάκης, Δ. Ρωσσικόπουλος, Α. Φωτίου, 1994. Αλγόριθμοι συνορθώσεων και στατιστική αξιολόγηση μετασχηματισμού ομοιότητας και αφινικού. *Τεχνικά Χρονικά*, Επιστημονική έκδοση ΤΕΕ, Τόμ. 14, Τεύχος 1, σελ. 329-351.

Mikhail E.M. and G. Gracie (1981). *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*. Van Nostrand Reinhold Publishing, p.340.

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (2012).
http://www.itl.nist.gov/div898/handbook

Ρωσσικόπουλος, Δ (1992). *Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ.463.

Φωτίου, Α. (2007). *Γεωμετρική Γεωδαισία. Θεωρία και Πράξη*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 467 (ISBN: 978-960-456-042-4).

Φωτίου, Α. και Χ. Πικριδάς (2012). *GPS και Γεωδαιτικές Εφαρμογές, Δεύτερη έκδοση*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 479 (ISBN: 978-960-456-346-3).