

# Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους με αυτοβαθμονόμηση

Γ. Πάνου, Ρ. Κορακίτης, Ε. Λάμπρου

Τομέας Τοπογραφίας, ΣΑΤΜ - ΕΜΠ.

**Περίληψη:** Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια μέθοδος προσδιορισμού του αστρονομικού πλάτους ( $\Phi$ ) που αξιοποιεί σύγχρονο γεωδαιτικό εξοπλισμό και παρέχει ευκολία, ταχύτητα και ακρίβεια. Η απαίτηση ευκολίας και ακρίβειας οδηγεί σε παρατήρηση άστρων τη στιγμή της μεσημβρινής τους διάβασης. Στην περίπτωση αυτή το σημαντικότερο σφάλμα οφείλεται στην αστρονομική διάθλαση. Για την εκτίμησή της χρησιμοποιούνται μοντέλα που βασίζονται στα γενικά χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας και τις τοπικές συνθήκες στη θέση του παρατηρητή. Στην προτεινόμενη μέθοδο, ο υπολογισμός (εκτίμηση) του αστρονομικού πλάτους και των παραμέτρων του μοντέλου διάθλασης γίνεται ταυτόχρονα, με βάση τα παρατηρούμενα μεγέθη και με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων (αυτοβαθμονόμηση). Η αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθόδου έγινε με δεδομένα αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων, που πραγματοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό. Έμφαση δόθηκε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της αυτοβαθμονόμησης με τα αντίστοιχα της εφαρμογής της κλασικής μεθόδου Sterneck. Μετά την ανάλυση των παρατηρήσεων έγινε φανερό ότι, με την προτεινόμενη μέθοδο εντοπίζονται, ελέγχονται και περιορίζονται οι επιδράσεις των σφαλμάτων και εξασφαλίζεται ο προσδιορισμός του αστρονομικού πλάτους με ακρίβεια λίγων δεκάτων του δευτερολέπτου τόξου.

## 1. Εισαγωγή

Το αστρονομικό πλάτος  $\Phi$  ενός σημείου είναι η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της κατακορύφου του σημείου με το επίπεδο του Ισημερινού, δηλαδή είναι η απόκλιση του ζενίθ του σημείου αυτού (Mueller, 1969). Ο προσδιορισμός του πλάτους με παρατήρηση κάποιου άστρου μπορεί να γίνει εφόσον είναι γνωστά τρία στοιχεία, που συνήθως είναι: η απόκλιση  $\delta$ , η ζενίθια απόσταση  $z$  και η υπολογιζόμενη (από το χρόνο παρατήρησης) ωριαία γωνία του άστρου. Όταν η παρατήρηση γίνεται τη στιγμή της άνω μεσουράνιασης του άστρου, τότε η ωριαία γωνία είναι εξ ορισμού μηδέν, έχουμε ότι (Κορακίτης, 2008):

$$\Phi = \delta - z \quad \text{άνω μεσουράνιαση } \underline{\text{βόρεια}} \text{ του ζενίθ} \quad (1.1)$$

$$\Phi = \delta + z \quad \text{άνω μεσουράνιαση } \underline{\text{νότια}} \text{ του ζενίθ} \quad (1.2)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι  $\delta\Phi = \mp \delta z$ , δηλαδή το προκαλούμενο σφάλμα  $\delta\Phi$  στην τιμή του πλάτους είναι ίσο με το σφάλμα  $\delta z$  στην εκτίμηση της πραγμα-

τικής ζενίθιας απόστασης του άστρου, φυσικά με την παραδοχή ότι τυχόν σφάλμα στην τιμή της απόκλισης  $\delta$  του άστρου είναι αμελητέο. Επειδή το μέγιστο μέρος του σφάλματος  $dZ$  οφείλεται στην αστρονομική διάθλαση, η επίδρασή του μπορεί να εξαλειφθεί αν παρατηρηθεί ένα ζευγάρι άστρων που να μεσουρανούν εκατέρωθεν του ζενίθ στην ίδια απόσταση (συμμετρία ως προς το ζενίθ) και με μικρή διαφορά χρόνου (ώστε να είναι ίδια η κατάσταση της ατμόσφαιρας).

Στο συλλογισμό αυτό βασίζεται η μέθοδος Sterneck (Mueller, 1969). Κάθε ζευγάρι άστρων (βόρειο N και νότιο S) δίνει μια τιμή πλάτους που προκύπτει ως ο μέσος όρος των αντιστοίχων τιμών, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.1) και (1.2)

$$\Phi = \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} = \frac{\delta_N + \delta_S}{2} + \frac{Z_S - Z_N}{2} \quad (1.3)$$

Στην πράξη, όμως, δεν είναι δυνατό να βρεθούν άστρα σε ακριβώς συμμετρικές θέσεις. Επιπλέον, η μέθοδος εκτός της συμμετρίας προϋποθέτει και ίδια κατάσταση της ατμόσφαιρας, σε διαφορετικές διευθύνσεις παρατήρησης και στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της παρατήρησης των άστρων κάθε ζεύγους. Με αυτές τις προδιαγραφές, μόνο θεωρητικά η μέθοδος Sterneck μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Σήμερα, για τον ακριβή προσδιορισμό της διεύθυνσης της κατακορύφου επίγειων σταθμών παρατήρησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και Συστήματα Ψηφιακών Ζενίθιων Καμερών (DZCS), τα οποία παρατηρούν άστρα σε μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το ζενίθ, οπότε τα σφάλματα διόρθωσης της αστρονομικής διάθλασης έχουν αμελητέα επίδραση. Σε σύγκριση με τα κλασικά αστρονομικά θεοδόλια, η συλλογή δεδομένων είναι πολύ πιο γρήγορη και οι ακρίβειες σημαντικά υψηλότερες. Συγκεκριμένα, η διάρκεια παρατήρησης ανά σταθμό είναι της τάξης της μίας ώρας και η ακρίβεια προσδιορισμού κυμαίνεται από  $\pm 0''.05$  έως  $\pm 0''.1$  (Hirt and Seeber, 2008). Όμως, τα συστήματα αυτά είναι ακριβά και υπάρχουν σε πολύ λίγα ινστιτούτα, όπως του Ανόβερου και της Ζυρίχης. Αντίθετα, στην προτεινόμενη μέθοδο αξιοποιείται σύγχρονος γεωδαιτικός εξοπλισμός (ψηφιακοί γεωδαιτικοί σταθμοί) που είναι ευρύτατα διαδεδομένος.

## 2. Μοντέλα αστρονομικής διάθλασης

Αστρονομική διάθλαση (astronomical refraction) είναι η γωνία (R) που πρέπει να προστεθεί στην παρατηρούμενη τιμή της ζενίθιας απόστασης ( $z_0$ ) για να προκύψει η τιμή (z) στην οποία θα έβλεπε ο παρατηρητής το άστρο αν δεν υπήρχε ατμόσφαιρα (γεωμετρική θέση του άστρου)

$$z = z_0 + R \quad (2.1)$$

Στην περιγραφή που ακολουθεί, επιδιώκεται ένας προσεγγιστικός υπολογισμός της

διάθλασης με βάση τα γενικά χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας και τις τοπικές συνθήκες στη θέση του παρατηρητή. Οι συνθήκες αυτές είναι η πίεση και η θερμοκρασία, ενώ η υγρασία επιδρά ελάχιστα στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος και δε θα ληφθεί υπόψη.

Τα μοντέλα διάθλασης που περιγράφονται έχουν βάση τις θεωρίες των Chauvenet (1960), Woolard and Clemence (1966), Smart (1977), Green (1985) και η ανάπτυξή τους στηρίζεται σε φυσικές και γεωμετρικές υποθέσεις. Οι φυσικές υποθέσεις που χρησιμοποιούνται περιγράφονται στη διαδικασία ανάπτυξης του κάθε μοντέλου ενώ οι γεωμετρικές, χάριν απλότητας, δέχονται τη συμμετρία των ατμοσφαιρικών στρωμάτων περί την κάθετη σε κάθε σημείο πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας (ισοτροπία). Έτσι δεν επηρεάζεται το αζιμούθιο του παρατηρούμενου σώματος και η φωτεινή ακτίνα βρίσκεται πάντα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το σημείο παρατήρησης και το άστρο. Τέλος, επειδή το συνολικό ύψος της ατμόσφαιρας είναι αμελητέο σε σχέση με την απόσταση των άστρων από τη γη, θεωρούμε ότι η φωτεινή ακτίνα, στο ευθύγραμμο τμήμα της εκτός ατμόσφαιρας, είναι παράλληλη με την ευθεία που συνδέει γεωμετρικά τον παρατηρητή με το άστρο.

### Μοντέλο I

Η ατμόσφαιρα αποτελείται από παράλληλα επίπεδα, που κάθε ένα από αυτά έχει τα δικά του οπτικά χαρακτηριστικά και δείκτη διάθλασης. Συμβολίζοντας με  $E$  το όριο της ατμόσφαιρας, το μέσο που συμβολίζεται με  $M$  υποδηλώνει το κενό, για το οποίο ο δείκτης διάθλασης είναι  $n = 1$ . Τα υπόλοιπα μέσα συμβολίζονται με  $M_v, M_{v-1}, \dots, M_0$  και έχουν δείκτες διάθλασης  $n_v, n_{v-1}, \dots, n_0$ , αντίστοιχα. Έστω  $z$  η γωνία πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας στην επιφάνεια  $E$ , που αντιστοιχεί στην πραγματική ζενίθια απόσταση,  $z_0$  η παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση και  $n_0$  ο δείκτης διάθλασης του αέρα στο σημείο παρατήρησης (O) (Σχήμα 1).

Εφαρμόζοντας το νόμο του Snell, κατά μήκος της φωτεινής ακτίνας, για τα διαδοχικά ζεύγη επιπέδων, λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\sin z = n_0 \sin z_0 \quad (2.2)$$

Αντικαθιστώντας στη (2.2) τη (2.1) προκύπτει

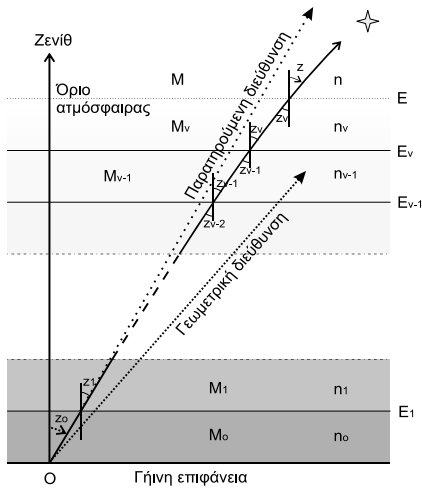
$$\sin(z_0 + R) = n_0 \sin z_0 \quad \text{ή} \quad \sin z_0 \cos R + \cos z_0 \sin R = n_0 \sin z_0.$$

Επειδή η γωνία  $R$  είναι πολύ μικρή,  $\cos R \approx 1$  και  $\sin R \approx R$ . Επομένως,

$$R = k \tan z_0 \quad (2.3)$$

όπου  $k = n_0 - 1$ .

Από τις παραδοχές που έγιναν προκύπτει ότι αυτό το μοντέλο ισχύει στην περίπτωση που το παρατηρούμενο άστρο βρίσκεται κοντά στο ζενίθ (ζενίθιες αποστάσεις μέχρι  $30^\circ$ ) (Woolard and Clemence, 1966).



Σχήμα 1. Μοντέλο I.

Για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες ( $p_0 = 1013.25$  mbar και  $\theta_0 = 0$  °C) και μονοχρωματικό κίτρινο φως ( $\lambda = 0.58$   $\mu\text{m}$ ), ο δείκτης διάθλασης έχει τιμή  $n_0 = 1.0002926$  (Jenkins and White, 1981), επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται

$$R_0 = 60''.35 \tan z_0 \quad (2.4)$$

Η σχέση αυτή δίνει την κανονική αστρονομική διάθλαση  $R_0$ . Η πραγματική διάθλαση  $R$  μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του νόμου των ιδανικών αερίων από τη σχέση

$$R = c R_0 \quad (2.5)$$

όπου

$$c = \frac{p}{1013.25} \cdot \frac{273}{(273 + \theta)} \quad (2.6)$$

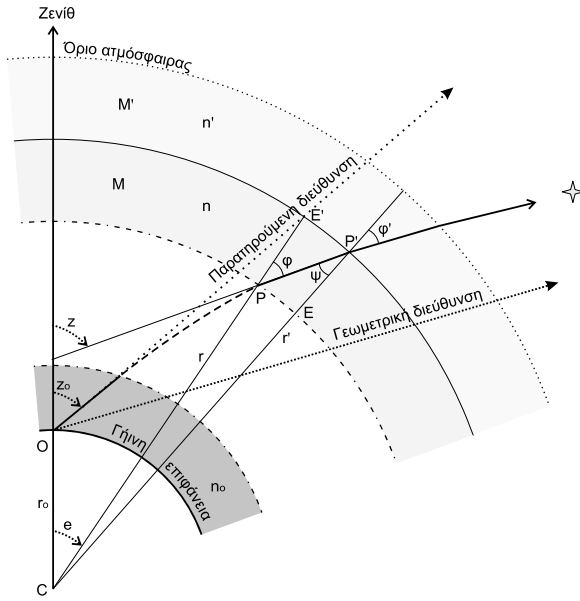
$p$  η ατμοσφαιρική πίεση (σε mbar) και  $\theta$  θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στο σημείο παρατήρησης.

## Μοντέλο II

Θεωρώντας τη γη σφαιρική και την ατμόσφαιρα που την περιβάλλει σφαιρικά συμμετρική ως προς το κέντρο της, στο Σχήμα 2 απεικονίζεται η τομή της με ένα κατακόρυφο επίπεδο.

Καθένα από τα διαδοχικά στρώματα της ατμόσφαιρας έχει τα δικά του οπτικά χαρακτηριστικά και δείκτη διάθλασης. Έστω  $r_0$  η ακτίνα της γης,  $z_0$  η παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση και  $n_0$  ο δείκτης διάθλασης του αέρα στην περιοχή του παρατηρητή (Ο).

Η φωτεινή ακτίνα  $PP'$  διέρχεται από το στρώμα  $M'$  με δείκτη διάθλασης  $n'$ , σε



Σχήμα 2. Μοντέλο II.

στρώμα M με δείκτη διάθλασης n. Έστω C το κέντρο της γης και  $CP' = r'$ ,  $CP = r$ , οι εσωτερικές ακτίνες των στρωμάτων M' και M. Ο νόμος Snell στο σημείο P' δίνει

$$n' \sin \phi' = n \sin \psi.$$

Στο τρίγωνο PCP', με εφαρμογή του νόμου ημιτόνων, έχουμε

$$r \sin \phi = r' \sin \psi.$$

Απαλείφοντας το  $\sin \psi$  από τις παραπάνω εξισώσεις

$$r' n' \sin \phi' = r n \sin \phi.$$

Η σχέση αυτή που αποδείχθηκε για δύο διαδοχικά στρώματα, ισχύει συνεπώς για κάθε δύο στρώματα της ατμόσφαιρας, με αποτέλεσμα το γινόμενο  $r n \sin \phi$  να παραμένει σταθερό, δηλαδή

$$r n \sin \phi = r_0 n_0 \sin z_0 \quad (2.7)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση  $r n \sin \phi = \text{σταθερό}$ , προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} + \frac{d\phi}{\tan \phi} = 0 \quad (2.8)$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι  $z = \phi + e$ , οπότε  $dz = d\phi + de$ . Επιπλέον, υποθέτοντας ότι τα στρώματα έχουν μικρό πάχος, έχουμε

$$\frac{dr}{r} = \frac{de}{\tan \phi}$$

Η προηγούμενη διαφορική εξίσωση (2.8) γράφεται ως

$$dz = - \frac{dn}{n} \tan\varphi \quad (2.9)$$

Η σχέση (2.9) αποτελεί τη γενική διαφορική εξίσωση της διάθλασης. Επιπλέον, με χρήση της (2.7) και ολοκληρώνοντας από  $n = n_0$  έως  $n = 1$  λαμβάνεται η διάθλαση R

$$R = r_0 n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n (r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \quad (2.10)$$

Η σχέση (2.10) (ολοκλήρωμα διάθλασης) περιλαμβάνει δύο μεταβλητές  $n$ ,  $r$ , όπου ο δείκτης διάθλασης  $n$  είναι συνάρτηση της απόστασης  $r$ . Για τον υπολογισμό του, επομένως, απαιτείται να βρεθεί η σχέση των δύο αυτών μεταβλητών, λαμβάνοντας υπόψη φυσικούς νόμους που περιλαμβάνουν στοιχεία της κατάστασης της ατμόσφαιρας. Δυστυχώς, η ελλιπής γνώση της συνεχώς μεταβαλλόμενης κατάστασης της ατμόσφαιρας έχει σαν αποτέλεσμα να μη μπορεί να διατυπωθεί ακριβής εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών και αναγκαστικά οδηγούμαστε σε προσεγγίσεις.

Συμβολίζοντας με  $h$  το ύψος της ατμόσφαιρας μέσα στο οποίο προκαλείται αξιόλογη διάθλαση ( $h \ll r_0$ ), μπορούμε να γράψουμε  $r = r_0 + h$ . Μετά από αντικαταστάσεις, το ολοκλήρωμα διάθλασης μπορεί να γραφεί ως

$$R = R_1 - R_2 \quad (2.11)$$

όπου

$$R_1 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n (n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \quad (2.12)$$

και

$$R_2 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{hn \, dn}{r_0 (n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{3/2}} \cdot \quad (2.13)$$

Από τις μαθηματικές προσεγγίσεις που έγιναν στις σχέσεις (2.12) και (2.13) προκύπτει ότι η μορφή του ολοκληρώματος διάθλασης (2.11) ισχύει για ζενίθιες αποστάσεις μέχρι  $70^\circ$  περίπου.

Χρησιμοποιώντας το νόμο των Dale-Gladstone (Green, 1985), που εκφράζει τη σχέση του δείκτη διάθλασης με την ατμοσφαιρική πυκνότητα, καθώς και τον ορισμό του ύψους της ομοιογενούς ατμόσφαιρας ( $H$ ) (Green, 1985), προκύπτει τελικά η ακόλουθη έκφραση για το μοντέλο II (Πάνου, 2009)

$$R = a \tan z_0 + b \tan^3 z_0 \quad (2.14)$$

$$\text{όπου } a = (n_0 - 1) \left(1 - \frac{H}{r_0 n_0}\right) \text{ και } b = (n_0 - 1) \left[\frac{1}{2} (n_0 - 1) - \frac{H}{r_0 n_0}\right].$$

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο μοντέλο I, για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες ( $p_0 = 1013.25$  mbar και  $\theta_0 = 0$  °C) και μονοχρωματικό κίτρινο φως ( $\lambda = 0.58$   $\mu\text{m}$ ), ο δείκτης διάθλασης έχει τιμή  $n_o = 1.0002926$ . Θεωρώντας το ύψος της ομοιογενούς ατμόσφαιρας  $H = 8$  km και την ακτίνα της γης ίση με 6371 km (Young, 2004), η παραπάνω σχέση γράφεται

$$R_0 = 60''.28 \tan z_0 - 0''.067 \tan^3 z_0 \quad (2.15)$$

### 3. Προτεινόμενη μέθοδος

Στη μέθοδο που προτείνεται στην παρούσα εργασία γίνεται ταυτόχρονος προσδιορισμός του αστρονομικού πλάτους ( $\Phi$ ) και των παραμέτρων του μοντέλου της κανονικής διάθλασης ( $R_0$ ).

Από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) προκύπτει η εξίσωση

$$\delta \pm z - \Phi = 0 \left[ \begin{array}{c} +S \\ -N \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

Συνεπώς, για κάθε παρατηρούμενο άστρο έχουμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\delta_i \pm (z_{oi} + c_i R_{oi}) - \Phi = 0, \quad \text{για κάθε άστρο } i = 1, \dots, v. \quad (3.2)$$

όπου  $R_{oi} = k \tan z_{oi}$  για το μοντέλο I και  $R_{oi} = a \tan z_{oi} + b \tan^3 z_{oi}$  για το μοντέλο II. Επιπλέον, για τον υπολογισμό του συντελεστή  $c_i$  απαιτούνται οι τιμές της θερμοκρασίας ( $\theta$ ) και της ατμοσφαιρικής πίεσης ( $p$ ) κατά την παρατήρηση του άστρου. Ας σημειωθεί ότι, οι τιμές της θερμοκρασίας και της πίεσης, κατά συνέπεια και ο συντελεστής  $c$ , θεωρούνται ότι έχουν αμελητέο σφάλμα.

Το γεγονός ότι οι παρατηρήσεις είναι περισσότερες από τις απαραίτητες, υπαγορεύει την ανάγκη συνόρθωσης με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) (Αγατζιά - Μπαλοδήμου 2007, Δερμάνης 1992).

Οι εξισώσεις συνθήκης για το μοντέλο I και II αντίστοιχα, είναι της μορφής

$$f_{II} = \hat{\delta}_i \pm (\hat{z}_{oi} + c_i \hat{k} \tan \hat{z}_{oi}) - \hat{\Phi} = 0 \quad (3.3)$$

$$f_{III} = \hat{\delta}_i \pm (\hat{z}_{oi} + c_i \hat{a} \tan \hat{z}_{oi} + c_i \hat{b} \tan^3 \hat{z}_{oi}) - \hat{\Phi} = 0 \quad (3.4)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι γραμμικές ως προς παραμέτρους και μετρήσεις. Για την εφαρμογή της Μ.Ε.Τ. απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor των εξισώσεων αυτών στη θέση κάποιων προσωρινών τιμών για τις παραμέτρους ( $x_0$ ) και των μετρήσεων ( $\ell$ ).

Το σύστημα των εξισώσεων συνθήκης σε μορφή πινάκων διαμορφώνεται ως εξής

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (3.5)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{A}$  σχηματίζεται από την παραγωγή των σχέσεων  $f_{II}$ ,  $f_{III}$  ως προς τις παραμέτρους ( $\hat{\mathbf{x}}$ ) στη θέση των προσωρινών τιμών, ο πίνακας  $\mathbf{B}$  σχηματίζεται από την παραγωγή των σχέσεων  $f_{II}$ ,  $f_{III}$  ως προς τις μετρήσεις ( $\hat{\ell}$ ) στη θέση των προσωρινών τιμών,  $\delta\mathbf{x}$  οι διορθώσεις των προσωρινών τιμών,  $\mathbf{v}$  το διάνυσμα των υπολοίπων (αποκλίσεων και ζενιθίων αποστάσεων) και  $\mathbf{w} = -f_1(\mathbf{x}_0, \ell)$  το διάνυσμα σφαλμάτων.

Για την παράμετρο του αστρονομικού πλάτους μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσωρινή τιμή το γεωδαιτικό πλάτος ενώ στα μοντέλα διάθλασης I, II οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων προκύπτουν από τους συντελεστές των σχέσεων (2.4) και (2.15), αντίστοιχα.

Η διάθεση τουλάχιστον τόσων εξισώσεων όσων και αγνώστων συνιστά μια αναγκαία μεν αλλά όχι και ικανή συνθήκη λύσης. Και αυτό γιατί, εκτός του επαρκούς αριθμού τους, οι εξισώσεις οφείλουν να εξασφαλίζουν και ορισμένες "γεωμετρικές" προϋποθέσεις που αφορούν το ίδιο το μοντέλο με τους περιορισμούς του (π.χ. το μοντέλο I ισχύει όταν  $z_0 < 30^\circ$ ) αλλά και τις τιμές των ζενιθίων αποστάσεων (π.χ. περίπου ίδιες τιμές ζενιθίων αποστάσεων για όλα τα άστρα συνιστά κακή επιλογή). Εάν πάλι τα άστρα βρίσκονται όλα βόρεια ή όλα νότια του ζενίθ, τότε η λύση που προκύπτει είναι πολύ αβέβαιη.

#### 4. Αξιολόγηση

Για την αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθόδου προσδιορισμού του πλάτους χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις σειρές αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων που πραγματοποιήθηκαν σε δύο σημεία του Νομού Αττικής:

- Αστρονομικό βάθρο στο Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου (1<sup>η</sup> Σειρά - 18/05/02, Λάμπρου, 2003).
- Βάθρο στο δώμα του κτ. Λαμπαδαρίου Πολυτεχνειούπολης Ζωγράφου (2<sup>η</sup> Σειρά - 11/05/09, 3<sup>η</sup> Σειρά - 21/05/09, Πάνου, 2009 και 4<sup>η</sup> Σειρά - 13/05/10, Αλεξανδράκης, 2011).

Παράλληλα, για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων, μέρος των παρατηρήσεων ήταν σχεδιασμένο για την εφαρμογή της κλασικής μεθόδου Sterneck.

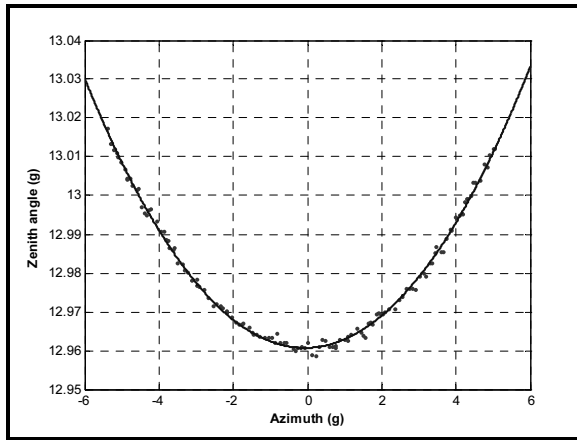
Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε ήταν:

- Γεωδαιτικός Σταθμός (Total Station) Leica TDM 5005 με απόδοση γωνιών  $0.1''$  και ακρίβεια γωνιών  $\pm 1.5''$ .
- Φορητός ψηφιακός καταγραφικός σταθμός μετεωρολογικών δεδομένων της εταιρείας Ahlborn, για την καταγραφή τιμών ατμοσφαιρικής πίεσης και θερμοκρασίας.

Μετά τον προσεγγιστικό προσανατολισμό του σταθμού (με τον Πολικό) παρατη-



ρείται κάθε άστρο γύρω από τη μεσημβρινή του διάβαση. Ο χρόνος, που απαιτείται για την ολοκλήρωση της παρατήρησης, είναι κατά μέσο όρο 8 - 10 min και το πλήθος των σκοπεύσεων είναι της τάξης των 100. Η επεξεργασία των καταγεγραμμένων μετρήσεων (ζευγών οριζόντιας - κατακόρυφης γωνίας) αποβλέπει στον προσδιορισμό της ελάχιστης τιμής της κατακόρυφης γωνίας, που είναι η τιμή τη στιγμή της μεσουράνησης. Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται με την προσαρμογή ενός συμμετρικού πολωνύμου 4<sup>ου</sup> βαθμού στις πλεονάζουσες παρατηρήσεις, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3 (Λάμπρου, 2003).



**Σχήμα 3.** Προσαρμογή πολωνύμου 4<sup>ου</sup> βαθμού στα μετρημένα ζεύγη (A, z).

Οι τιμές της φαινομένης απόκλισης  $\delta$  κάθε άστρου υπολογίζονται από τις θέσεις ICRF, J2000 που δίνονται στον αστρομετρικό κατάλογο Tycho2 (Høg E. et al., 2000). Για τον υπολογισμό του πίνακα βαρών  $\mathbf{P}$  χρησιμοποιήθηκε σαν a priori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους ( $\sigma_0$ ) η μονάδα (1").

Στους Πίνακες 1 και 2 που ακολουθούν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου και των στατιστικών ελέγχων ( $\chi^2$ ) για όλες τις σειρές των παρατηρήσεων. Σημειώνεται ότι, για ορισμένες τιμές πλάτους του Πίνακα 2, που βρίσκονται σε παρένθεση, δεν ικανοποιούνται οι στατιστικοί έλεγχοι.

Στη μέθοδο Sterneck, με εφαρμογή της σχέσης (1.3), για κάθε ζεύγος άστρων, προσδιορίζεται μια τιμή πλάτους. Για τον υπολογισμό της αστρονομικής διάθλασης, στη ζενίθια απόσταση κάθε άστρου, χρησιμοποιείται το μοντέλο I (2.4) και η σχέση (2.5). Η τελική τιμή του πλάτους προκύπτει από το μέσο όρο όλων των ζευγών. Τέλος, για την εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου χρησιμοποιείται ο νόμος μετάδοσης σφαλμάτων.

Στην προτεινόμενη μέθοδο αυτοβαθμονόμησης, για τις αβεβαιότητες των αποκλίσεων χρησιμοποιήθηκε η τιμή  $\sigma_\delta = 0''.01$ , που είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη απ' αυτήν του καταλόγου Tycho2, δεδομένου ότι στη διαδικασία προσδιορι-

**Πίνακας 1.** Αποτελέσματα επεξεργασίας με τη μέθοδο της αυτοβαθμολόμησης.

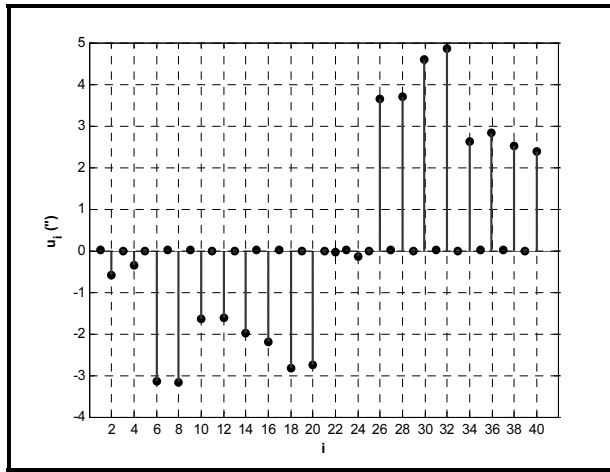
	Σειρά	Πλήθος άστρων	Μοντέλο	Παράμετροι			A posteriori $\hat{\sigma}_o$	Έλεγχος $\chi^2$
				$k \pm \sigma_k$	$a \pm \sigma_a$	$b \pm \sigma_b$		
Διόνυσος	1 <sup>η</sup>	20	I	$63'' \pm 2''$	-	-	$\pm 2''.1$	OXI
			II	-	$72'' \pm 6''$	$-68'' \pm 38''$	$\pm 2''.0$	OXI
		12	I	$57'' \pm 1''$	-	-	$\pm 0''.9$	NAI
			II	-	$56'' \pm 4''$	$9'' \pm 24''$	$\pm 0''.9$	NAI
	8	I	$75'' \pm 2''$	-	-	$\pm 1''$	NAI	
		II	-	$84'' \pm 3''$	$-82'' \pm 21''$	$\pm 0''.6$	NAI	
Λαμπαδάριο	2 <sup>η</sup>	8	I	$57'' \pm 5''$	-	-	$\pm 4''.7$	OXI
			II	-	$21'' \pm 7''$	$464'' \pm 90''$	$\pm 2''.0$	OXI
	3 <sup>η</sup>	16	I	$46'' \pm 1''$	-	-	$\pm 1''.2$	NAI
			II	-	$45'' \pm 4''$	$13'' \pm 31''$	$\pm 1''.2$	NAI
	4 <sup>η</sup>	10	I	$63'' \pm 1''$	-	-	$\pm 0''.3$	NAI
			II	-	$67'' \pm 1''$	$-24'' \pm 4''$	$\pm 0''.1$	NAI

**Πίνακας 2.** Αποτελέσματα τιμών πλάτους με τις μεθόδους Sterneck και αυτοβαθμολόμησης.

	Σειρά	Ζεύγη άστρων	Μέθοδος Sterneck ( $\Phi$ )	Πλήθος άστρων	Μοντέλο	Αυτοβαθμολόμηση ( $\Phi$ )
	II	$(38^\circ 4' 44''.7 \pm 0''.6)$				
	6	$38^\circ 4' 44''.5 \pm 0''.4$	12	I	$38^\circ 4' 44''.5 \pm 0''.4$	
				II	$38^\circ 4' 44''.5 \pm 0''.4$	
	4	$38^\circ 4' 44''.5 \pm 0''.5$	8	I	$38^\circ 4' 44''.3 \pm 0''.6$	
				II	$38^\circ 4' 44''.5 \pm 0''.3$	
Λαμπαδάριο	2 <sup>η</sup>	3	$37^\circ 58' 30''.1 \pm 0''.3$	8	I	$(37^\circ 58' 28'' \pm 1'')$
						II
	3 <sup>η</sup>	2	$37^\circ 58' 29''.6 \pm 0''.5$	16	I	$37^\circ 58' 29''.4 \pm 0''.4$
						II
	4 <sup>η</sup>	5	$37^\circ 58' 29''.5 \pm 0''.5$	10	I	$37^\circ 58' 29''.5 \pm 0''.2$
						II

σμού της φαινομένης θέσης υπεισέρχονται υπολογισμοί οι οποίοι αυξάνουν την αβεβαιότητα. Επιπλέον, οι αβεβαιότητες των ζενιθίων αποστάσεων προέκυψαν από την προσαρμογή του πολυωνύμου στις παρατηρήσεις. Τέλος, μέσω του στατιστικού ελέγχου  $\chi^2$  διαπιστώνεται, για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, αν το στατιστικό και μαθηματικό μοντέλο που θεωρήθηκε ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

Στην 1<sup>η</sup> Σειρά παρατηρήσεων, από την επεξεργασία των 20 άστρων, διαπιστώθηκε ασυμφωνία του αμφίπλευρου ελέγχου για το συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ερευνώντας την αιτία, σχεδιάστηκε το διάγραμμα των υπολοίπων  $\nu$  (Σχήμα 4).



**Σχήμα 4.** Τιμές υπολοίπων  $\nu$  για την 1<sup>η</sup> Σειρά παρατηρήσεων ( $\nu = 20$ ).

Από το Σχήμα 4 ανιχνεύθηκε η ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων στις τιμές των ζενιθίων αποστάσεων. Συγκεκριμένα, τα 20 άστρα χωρίζονται σε δύο ομάδες των 12 και 8 διαδοχικών άστρων αντίστοιχα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του στατιστικού ελέγχου, για τις δύο ομάδες χωριστά και για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% τα αποτελέσματα έγιναν αποδεκτά.

Η 2<sup>η</sup> Σειρά παρατηρήσεων δεν ικανοποιεί το στατιστικό έλεγχο εξαιτίας των κακών συνθηκών παρατήρησης, με αποτέλεσμα οι αβεβαιότητες των ζενιθίων αποστάσεων να είναι πολύ μεγάλες.

## 5. Συμπεράσματα

Οι προδιαγραφές της μεθόδου Sterneck αποτελούν τα μειονεκτήματά της. Η βασική της απαίτηση (συμμετρία) προκαλεί δυσκολία, τόσο στην επιλογή καταλλήλων άστρων, όσο και στην αντιμετώπιση των σφαλμάτων. Αντίθετα, με την άρση της συμμετρίας, η αυτοβαθμονόμηση επιτρέπει πολύ μεγαλύτερο αριθμό διαθέσιμων παρατηρούμενων άστρων. Επιπλέον, επιτυγχάνεται η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων της διαδικασίας συνόρθωσης, που καθίσταται επιτακτική, εξαιτίας της ιδιαιτερότητας των αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων (μη επαναληψιμότητα) και της δυναμικής κατάστασης της ατμόσφαιρας (διάγνωση ανεπιθύμητων σφαλμάτων – στατιστικός έλεγχος  $\chi^2$ ). Όμως, το σημαντικότερο όλων είναι η συνολική διαχείριση των σφαλμάτων. Δηλαδή, εκτός της επίδρασης των τυχαίων σφαλμάτων,

αντιμετωπίζει και περιορίζει (ως ένα βαθμό) τα συστηματικά σφάλματα των ζενιθίων αποστάσεων μέσω των μοντέλων διάθλασης (αυτοβαθμονόμηση). Τόσο το μοντέλο I, όσο και το μοντέλο II (ανάλογα με το εύρος των ζενιθίων αποστάσεων που θα μετρηθούν) μπορούν να δώσουν μια πολύ καλή τιμή του πλάτους. Συγκεκριμένα, η ακρίβεια που επιτεύχθηκε στον προσδιορισμό του πλάτους, από την ανάλυση των παρατηρήσεων, κυμαίνεται από  $0''.1$  έως  $0''.6$ . Για τους παραπάνω λόγους, προτείνεται η μέθοδος της αυτοβαθμονόμησης για έναν πιο εύκολο, γρήγορο και ακριβή προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους, με χρήση διαδεδομένου γεωδαιτικού εξοπλισμού.

## Βιβλιογραφία

- Αγατζά - Μπαλοδήμου, Α. Μ., 2007. *Θεωρία Σφαλμάτων & Συνορθώσεις II*. ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Αλεξανδράκης, Μ., 2011. *Προσδιορισμός αστρονομικών συντεταγμένων  $\Phi$ ,  $\Lambda$  με αστρογεωδαιτικές παρατηρήσεις και χρήση της εξίσωσης Laplace*. Διπλωματική Εργασία (υπό εκπόνηση), ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Chauvenet, W., 1960. *A Manual of Spherical and Practical Astronomy* (5<sup>th</sup> edition). Dover Publications, New York.
- Δερμάνης, Α., 1992. *Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Green, R. M., 1985. *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hirt, C., and Seeber, G., 2008. *Accuracy analysis of vertical deflection data observed with the Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D*. Journal of Geodesy, 82: 347-356.
- Høg, E., Fabricius, C., Makarov, V. V., Urban, S., Corbin, T., Wycoff, G., Bastian, U., Schwkendiek, P., Wicenc, A., 2000. *The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars*. Astronomy and Astrophysics, 355: L27-L30.
- Jenkins, F. A., and White, H. E., 1981. *Fundamentals of Optics* (6<sup>th</sup> edition). McGraw-Hill, New York.
- Κορακίτης, Ρ., 2008. *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας*. ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Λάμπρου, Ε., 2003. *Ανάπτυξη μεθοδολογίας αστρογεωδαιτικών προσδιορισμών με ψηφιακά γεωδαιτικά όργανα*. Διδακτορική Διατριβή, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Mueller, I. I., 1969. *Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy*. F. Ungar Publ. Co., New York.
- Πάνου, Γ., 2009. *Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους με αυτοβαθμονόμηση*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Smart, W. M., 1977. *Textbook on Spherical Astronomy* (6<sup>th</sup> edition). Cambridge University Press, Cambridge.
- Woolard, E. W., and Clemence, G. M., 1966. *Spherical Astronomy*. Academic Press, New York.
- Young, A. T., 2004. *Sunset science IV. Low-altitude refraction*. The Astronomical Journal, 127: 3622-3637.