Διαίρεση τυχαίας γωνίας με κανόνα και διαβήτη κατά μεγάλη προσέγγιση

[με την χρήση / συμβολή του λόγου της χρυσής τομής (ϕ)]

Κώστας Θ. Πατραμάνης

Πολιτικός Μηχανικός, Α.Π.Θ.

Περίληψη: Ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα Γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων είναι ***η τριχοτόμηση*** και γενικότερα η διαίρεση ***μιας τυχαίας γωνίας***.
Η δυσκολία έγκειται σε δύο περιορισμούς που έθεσαν κατά την διατύπωσή τους τον 5^{ο} π.Χ. αιώνα οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.
Οι προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων να επιλύσουν το πρόβλημα αυτό, με κανόνα και διαβήτη, απέβησαν άκαρπες. Επινόησαν όμως άλλες λύσεις με καμπύλες όμως διαφορετικές από τον κύκλο ή λύσεις με άλλα μηχανικά μέσα, διαφορετικά από τον κανόνα και τον διαβήτη.
Οι προσπάθειες αυτές συνεχίστηκαν μέχρι τον 19^{ο} μ.Χ. αιώνα.
Πέραν του προβλήματος της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας, εκείνο που δεν έχει μέχρι σήμερα τεθεί – εξ όσων γνωρίζουμε – είναι το συναφές πρόβλημα της διαίρεσης γωνίας κατά τον λόγο της χρυσής τομής ϕ . Να κάνουμε, με άλλα λόγια, την "χρυσή τομή" μίας γωνίας.
Η απάντηση που μπορεί να δοθεί – κατά την άποψή μου – είναι πως *Γεωμετρία* είναι κατά βάση η Χαρτογραφία, με *γωνίες* προσδιορίζονται τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη και με ένα… *διαβήτη* στο χέρι εικονίζονται αρκετοί παλαιοί Χαρτογράφοι!
Επιπροσθέτως, υπάρχουν ορισμένοι που υποστηρίζουν πως τα Τριγωνομετρικά / Γεωδαιτικά δίκτυα διαφόρων μορφών στηρίζονται στις αναλογίες των Αρχαίων μαθηματικών (αριθμητικές, γεωμετρικές, αρμονικές και… χρυσές) σε ότι αφορά τις γεωγραφικές θέσεις των Ιερών, των Πόλεων και των Μνημείων της Αρχαίας Ελλάδας.

Division of a random angle with ruler and compass in a very approximate way

[with the use / contribution of the ratio of the golden section (ϕ)]

Abstract: One of the three unsolved problems in Geometry by the ancient Greeks, is the trisection and generally the division of a random angle.
The difficulty lies in two restrictions set in the 5th BC century by ancient Greek mathematicians.
The efforts of the ancient Greeks to solve this problem, with ruler and compass, were fruitless. But they devised other solutions using curves, but different from the cycle or solutions with other mechanical means-different from the ruler and compass.

These efforts continued until the 19th century AD.
Beyond the problem of trisection random angle, what has so far been - to our knowledge - is the related problem of angle division in the ratio of the golden section (φ). To proceed, in other words, the "golden mean" of an angle.
The answer can be given - in my view - is that Geometry is basically Cartography, with angles determined the longitudes and latitudes and a compass in hand like depicted several old Cartographers!
Additionally, there are some who argue that the trigonometric / Geodetic networks of various forms based on proportions of ancient mathematics (arithmetic, geometric, harmonic and gold proportions) in terms of geographical locations of the Holy Places, Cities and Monuments of Ancient Greece.

1. Πρόλογος

Είναι γνωστό ότι ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα Γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων είναι **η τριχοτόμηση** και γενικότερα η διαίρεση **μιας τυχαίας γωνίας.**

Η δυσκολία και εν τέλει η αδυναμία επίλυσης του προβλήματος αυτού – εκτός βεβαίως της διαίρεσης σε άρτιο αριθμό γωνιών ή της διαίρεσης ορισμένων συγκεκριμένων γωνιών – όπως αποδείχθηκε πολύ αργότερα, τον $19^{ου}$ αιώνα μ.Χ., έγκειται στους δύο περιορισμούς που έθεσαν κατά την διατύπωσή τους τον $5^{ο}$ π.Χ. αιώνα οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.

Συγκεκριμένα για να θεωρηθεί αποδεκτή μια λύση θα πρέπει:

- Να χρησιμοποιηθεί μόνο ***κανόνας*** και *διαβήτης*, δηλαδή ευθείες γραμμές και κύκλοι μόνο, προκειμένου η γεωμετρική κατασκευή να ανάγεται πλήρως στα αξιώματα των "Στοιχείων του Ευκλείδη"
- Να μην απαιτείται άπειρος αριθμός βημάτων για την λύση τους ή "δοκιμές", αλλά πεπερασμένος και μονοσήμαντος.

Οι προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων να επιλύσουν το πρόβλημα αυτό, με κανόνα και διαβήτη, απέβησαν άκαρπες. Επινόησαν όμως άλλες λύσεις – πολύ σπουδαίες – με καμπύλες όμως διαφορετικές από τον κύκλο ή λύσεις με άλλα μηχανικά μέσα, διαφορετικά από τον κανόνα και τον διαβήτη. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά την τετραγωνίζουσα - τριχοτομούσα καμπύλη του Ιππία *(δεύτερο μισό $5^{ου}$ αιώνα π.Χ.)* και την έλικα του Αρχιμήδη (*287-212 π.Χ.*)

Πρόκειται για μεγαλοφυείς για την εποχή τους – και όχι μόνον – λύσεις με την διαφορά ότι δεν κατασκευάζονται αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη αλλά απαιτείται η κατασκευή τους να γίνει σημείο προς σημείο, γεγονός που και οι ίδιοι αναγνώριζαν.

Οι προσπάθειες αυτές συνεχίστηκαν και στους μεταγενέστερους μαθηματικούς κύκλους μέχρι τον $19^{ο}$ μ.Χ. αιώνα, από μεγάλες φυσιογνωμίες των μαθηματικών διεθνώς, μέχρι να αποδειχθεί θεωρητικά – όταν πλέον είχε αναπτυχθεί η Άλγεβρα

– ότι το πρόβλημα αυτό δεν έχει λύση στη γενική του μορφή με την χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη.

Παρ' όλα αυτά, έκτοτε και μέχρι και σήμερα, πολλοί συνεχίζουν να ασχολούνται με το πρόβλημα και ορισμένοι μάλιστα υποστηρίζουν ότι… το έλυσαν, πλην όμως κάτι σημαντικό τους διαφεύγει κάθε φορά !

Πέραν του προβλήματος της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας, εκείνο που δεν έχει μέχρι σήμερα τεθεί – εξ όσων γνωρίζουμε – είναι το συναφές πρόβλημα της διαίρεσης γωνίας κατά τον λόγο της χρυσής τομής ϕ. Να κάνουμε, με άλλα λόγια, την "χρυσή τομή" μίας γωνίας.

Τούτων δοθέντων, μόνον μια προσεγγιστική λύση μπορεί να συζητήσει κανείς για τα ως άνω προβλήματα. Μια λύση με μεγάλη, κατά το δυνατόν, προσέγγιση και αυτό ακριβώς γίνεται στην παρούσα εργασία. Η προσέγγιση / ακρίβεια καθορίζεται στην τάξη του $1''$ $\left(\frac{1}{60\times 60}=\frac{1}{3600}\right)$ της μοίρας, δηλαδή σφάλμα μικρότερο από την μικρότερη μονάδα μέτρησης γωνιών που έχει θεσπισθεί. Σημειώνεται ότι η ακρίβεια μέτρησης γωνιών των σύγχρονων τοπογραφικών οργάνων είναι 5~15 cc, ήτοι μέγιστη προσέγγιση/ακρίβεια $\frac{5}{100\times 100}=\frac{1}{2000}$, μεγαλύτερης δηλαδή απόκλισης από το θεσπιζόμενο $\frac{1}{3600}$ της μοίρας.

Τέλος, στο εύλογο ερώτημα:

- Καλά και ενδιαφέροντα όλα τα παραπάνω – κυρίως δε από μία άποψη της Ιστορίας της Γεωμετρίας – αλλά πως… σχετίζονται με την Χαρτογραφία που αποτελεί τον πυρήνα αυτού του τιμητικού τόμου;

Η απάντηση που μπορεί να δοθεί – κατά την άποψή μου – είναι πως ***Γεωμετρία*** είναι κατά βάση η Χαρτογραφία, με ***γωνίες*** προσδιορίζονται τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη και με ένα… ***διαβήτη*** στο χέρι εικονίζονται αρκετοί παλαιοί Χαρτογράφοι !

Επιπροσθέτως, υπάρχουν ορισμένοι που υποστηρίζουν πως τα Τριγωνομετρικά / Γεωδαιτικά δίκτυα διαφόρων μορφών στηρίζονται στις αναλογίες των Αρχαίων μαθηματικών (αριθμητικές, γεωμετρικές, αρμονικές και… χρυσές) σε ότι αφορά τις γεωγραφικές θέσεις των Ιερών, των Πόλεων και των Μνημείων της Αρχαίας Ελλάδας.

2. Διαίρεση τυχαίας γωνίας με κανόνα και διαβήτη

2.1. Γενικά

Είναι γνωστό ότι η διαίρεση τυχαίας γωνίας, με την χρήση μόνον κανόνα και διαβήτη, σε αριθμό γωνιών δυνάμεων του 2 (2^{ν}) γίνεται με απλό τρόπο, διχοτομώντας κάθε φορά συγκεκριμένη γωνία.

Το πρόβλημα είναι να διαιρεθεί μια τυχαία γωνία σε περιττό αριθμό γωνιών και πρωτίστως σε τρεις ίσες γωνίες (τριχοτόμηση), αποκλειστικά με την χρήση κανόνα και διαβήτη.

Δεν είναι γνωστό πότε το πρώτον τέθηκε το πρόβλημα της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας στην ελληνική αρχαιότητα. Ίσως όταν χρειάστηκαν – κατά την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων – να κατασκευάσουν ένα κανονικό 9/γωνο και έπρεπε να τριχοτομήσουν την επίκεντρη γωνία των 120^{o}.

Στην ουσία το πρόβλημα – όπως είναι γνωστό – επικεντρώνεται στην τριχοτόμηση μιας τυχαίας οξείας γωνίας, διότι αν η προς τριχοτόμηση γωνία είναι αμβλεία, αφαιρούμε από αυτήν την ορθή γωνία, που τριχοτομείται με κανόνα και διαβήτη κατά πολύ απλό τρόπο. Είναι επίσης γνωστό ότι και μία σειρά άλλων συγκεκριμένων γωνιών (λ.χ. η γωνία των 54^{o}) τριχοτομούνται με κανόνα και διαβήτη.

Η τριχοτόμηση και γενικότερα η διαίρεση μιας τυχαίας γωνίας **(όχι όμως και "τυχαίως προκύπτουσας" γιατί αυτή… τριχοτομείται και μάλιστα εύκολα!)** σε γωνίες των οποίων οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εκφράζονται με αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού άνω του 2, είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με κανόνα και διαβήτη.

Για ότι αφορά την τριχοτόμηση, είναι γνωστή, λόγου χάριν, η τριγωνομετρική σχέση $\sigma\upsilon\nu 3\vartheta = 4\sigma\upsilon\nu^3\vartheta - 3\sigma\upsilon\nu\vartheta$ που οδηγεί στην εξίσωση $4X^3 - 3X - \alpha = 0$, όπου $\alpha = \sigma\upsilon\nu 3\vartheta$ και $X = \sigma\upsilon\nu\vartheta$.

Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη των ριζών αυτής είναι δυνατή μόνον αν μπορεί να μετασχηματιστεί σε γινόμενο δύο παραγόντων, έναν πρώτου βαθμού και έναν δεύτερου βαθμού. Αυτό όμως αποδείχθηκε το 1837 ότι είναι αδύνατον. Γενικώς το ακατόρθωτο μιας ακριβούς λύσης, στη γενική του μορφή –όπως και το αντίστοιχο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου– αποδείχθηκε με την εφαρμογή της θεωρίας του ιδιοφυούς Γάλλου μαθηματικού Εβαριστ Γκαλουά (25 Οκτωβρίου 1811 – 31 Μαΐου 1832, που σκοτώθηκε… σε μονομαχία σε ηλικία 21 ετών !)

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έλυσαν και αυτό το πρόβλημα – όπως και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου καθώς και το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου –αλλά όχι με τον τρόπο που επιθυμούσαν. Και εδώ, όπως και γενικότερα στη Γεωμετρία, ήταν ιδιαίτερα απαιτητικοί και δεν δέχονταν την χρήση άλλων οργάνων εκτός από τον κανόνα και τον διαβήτη.

Στις λύσεις όμως που έδωσαν – καθ' υπέρβαση της αποκλειστικής χρήσης του κανόνα και διαβήτη, με την χρήση ειδικών καμπύλων που επινόησαν ή με την χρήση ειδικών οργάνων "κινητικής Γεωμετρίας", που φέρουν γενικώς το όνομα "τριχοτόμοι" – μόνο με θαυμασμό στέκεται κανείς μπροστά τους και σήμερα ακόμα.

Οι γνωστότεροι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες που ασχολήθηκαν με την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι

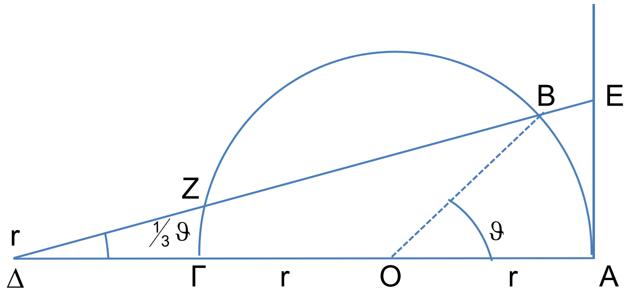
- ο Ιππίας ο Ηλείος (περίπου 430 π.Χ.)
- ο Αρχιμήδης *(287-212 π.Χ.)*
- ο Νικομήδης (περίπου 200 π.Χ.)
- ο Πάππος ο Αλεξανδρινός ($3^{ος}$ αι. μ.Χ.)

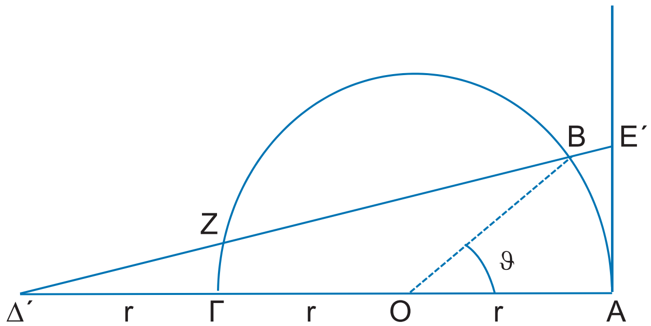
Τον δρόμο των Ελλήνων Γεωμετρών ακολούθησαν από τον *$10^{ο}$ ~ $19^{ο}$ αι. μ.Χ* και άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί διεθνώς

Al Nasawi, Άραβας μαθηματικός ($10^{ος}$ αι.μ.Χ), Pascal (1623-1662 μ.Χ), Mac Laurin (1742 μ.Χ) και άλλοι αρκετοί.

Η λύση του προβλήματος της τριχοτόμησης και γενικώς της διαίρεσης τυχαίας γωνίας, κατά μεγάλη προσέγγιση, σε γωνίες που έχουν μεταξύ τους σχέσεις που εκφράζονται με αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 2 (όπως η “χρυσή τομή” γωνίας) που προτείνεται εδώ βασίζεται στις προσπάθειες για την προσέγγιση του $\boldsymbol{\pi}$, μέσω της “ευθειοποίησης” κυκλικών τόξων, που έγιναν κατά τον $17^{ο}$ αι. μ.Χ. από τους *W.Snellius (1580-1626 μ.Χ), C.Huygens (1629-1693 μ.Χ).*

Η βάση αυτή είναι η εξής





Έχει αποδειχθεί ότι το άνω όριο του μήκους του τόξου ΑΒ είναι το ΑΕ (όπου ΖΔ=r) και το κάτω όριο είναι το ΑΕ΄ (όπου ΓΔ΄ = r).

- Σημειώνεται μάλιστα, ότι στην περίπτωση όπου το ΖΔ=r τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\widehat{E\Delta A}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$, αλλά αυτό δεν μπορεί να αποτελέσει λύση τριχοτόμησης γιατί δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθεί μονοσήμαντα το Δ με κανόνα και διαβήτη. Προσδιορίζεται μόνον με αλλεπάλληλες δοκιμές ή με ειδικό όργανο “κινητικής Γεωμετρίας”, γεγονός που δεν είναι παραδεκτό, με βάση τις προϋποθέσεις που τέθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες.

Στην λύση που προτείνεται γίνεται χρήση του λόγου της χρυσής τομής *(ϕ)* που, ως γνωστόν, αποτελεί την διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε **"μέσο και άκρο λόγο"** όπως τέθηκε από τον Ευκλείδη.

όπου: $\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})}=\frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{B\Gamma})}=\phi$

η δε αριθμητική τιμή του ϕ είναι 1,61803398874…

Πρόκειται για άρρητο αριθμό – τον πλέον άρρητο εκ των αρρήτων – που όμως κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη με πολλούς απλούς τρόπους.

2.2 Τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας

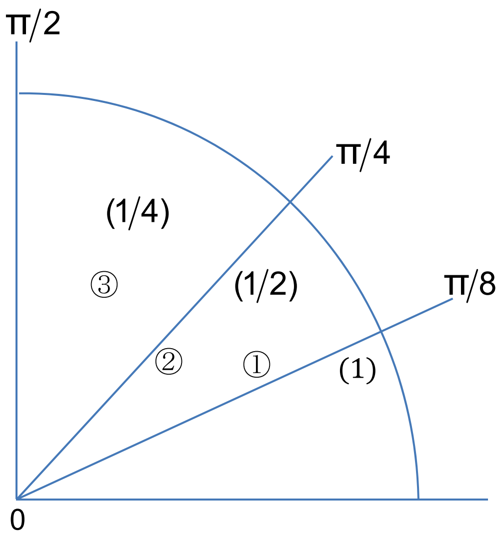
Με βάση τα ανωτέρω αναφερθέντα (στον ΠΡΟΛΟΓΟ και στο 2.1), η σκέψη που έγινε εδώ, για λύση του προβλήματος με κανόνα και διαβήτη κατά μεγάλη προσέγγιση, είναι να προσδιορισθεί μονοσήμαντα το σημείο Δ με την συνδρομή του ϕ.

Μετά από σχετικές επεξεργασίες προκύπτει αριθμητικά ότι επιτυγχάνεται ακρίβεια με σφάλμα μικρότερο του 1", που είναι η μικρότερη υποδιαίρεση μέτρησης των γωνιών ($\frac{1}{60\times 60}=\frac{1}{3600}$ της μοίρας), όταν $(\Gamma\Delta)^2=\frac{3}{5}\phi$ και είναι προφανώς (ΓΔ) < r.

Προσδιορίζοντας έτσι το σημείο Δ, κατασκευάζοντας εύκολα (μόνο με κανόνα και διαβήτη) το ΓΔ από την ανωτέρω σχέση, προχωρούμε στην υποδιαίρεση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ – επίσης μόνον με κανόνα και διαβήτη επί τη βάσει του θεωρήματος των παραλλήλων του Θαλή – όπως επιθυμούμε *(Σχ.1 & Σχ.1α)* Σημειώνεται ότι για τον σχεδιασμό της γωνίας που είναι ίση με το $1/3$ της προς τριχοτόμηση ή για κάθε άλλη υποδιαίρεση και προκειμένου να έχουμε την μέγιστη δυνατή προσέγγιση, χρησιμοποιούμε αντί του ως άνω Δ το σημείο Δ΄ όπου (ΓΔ΄) = r.

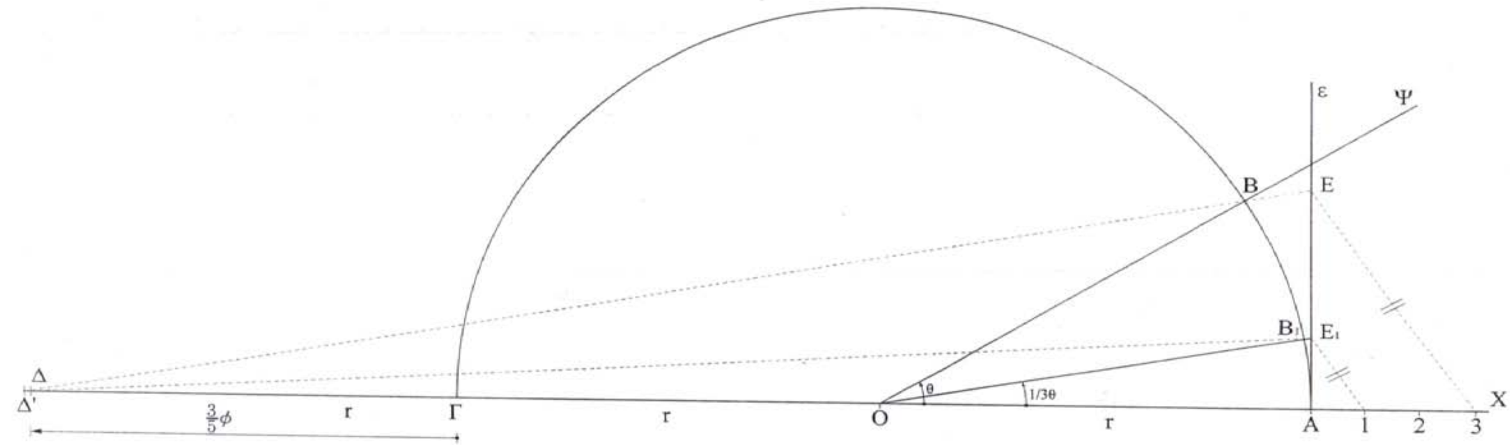
Κατ’ αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε, με την ακρίβεια που προαναφέραμε – μόνον με χρήση κανόνα και διαβήτη – την τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας ή και γενικότερα την διαίρεση της σε γωνίες που έχουν μεταξύ τους σχέση εκφραζόμενες με αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 2 (λ.χ. “χρυσή τομή” γωνίας).

Προκειμένου πάντοτε να παραμένουμε σε προσέγγιση – κατ’ ελάχιστον – με σφάλμα μικρότερο του 1″ και δοθέντος ότι όσο μικρότερη είναι η προς διαίρεση γωνία τόσο αυξάνεται η προσέγγιση, προτείνεται προηγουμένως ο διαχωρισμός των προς υποδιαίρεση γωνιών σε (3) περιοχές, ως κατωτέρω:



- Για υποδιαίρεση γωνιών μικρότερων από $\pi/8$ $(\vartheta < \pi/8)$ / περιοχή ①… απ’ ευθείας υποδιαίρεση (1)
- Για υποδιαίρεση γωνιών μεταξύ $\pi/8$ και $\pi/4$ $(\pi/8 < \vartheta < \pi/2)$/περιοχή ②… τότε προηγείται διχοτόμηση (1/2)
- Για υποδιαίρεση γωνιών μεταξύ $\pi/4$ και $\pi/2$ $(\pi/4 < \vartheta < \pi/2)$/περιοχή ③… τότε προηγείται διπλή διχοτόμηση (1/4)

ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ, ΚΑΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
(χρήση / συμβολή του λόγου της χρυσής τομής)



Σχ. 1

"1" $\triangleq$ 8 *cm*

Για την τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας $X\hat{O}\Psi$:

1. Γράφεται κύκλος $O, r =$ "1" και Αε εφαπτομένη του **κύκλου στο** σημείο Α $(X\hat{O}\Psi = A\hat{O}B)$
2. Επεκτείνεται η ΟΑ και σημειώνεται σημείο Δ΄ ώστε $(\Gamma\Delta') = r =$ "1"
3. Προσδιορίζεται το σημείο Δ επί της ΓΔ΄απο την σχέση $(\Gamma\Delta)^2 = 3/5\,\phi$ (Σχ. 1α)
4. Σύρεται η ευθεία ΔΒ που τέμνει την Αε στο σημείο Ε
5. Προσδιορίζεται το σημείο $Ε_1$ επί της ΑΕ, με το **θεώρημα των παρ/λων**, ώστε $AE_1 = 1/3(AE)$
6. Σύρεται η ευθεία $Δ΄Ε_1$ που τέμνει την **περιφέρεια** του **κύκλου** στο σημείο $Β_1$

Η γωνία $A\hat{O}B_1$ είναι, κατά **προσέγγιση** ίση με $1/3\,X\hat{O}\Psi$ **με σφάλμα**, που προκύπτει αριθμητικά, μικρότερο του $1''$ $\left(\frac{1}{60 \times 60} = \frac{1}{3600}\right.$ της μοίρας$\left.\right)$.

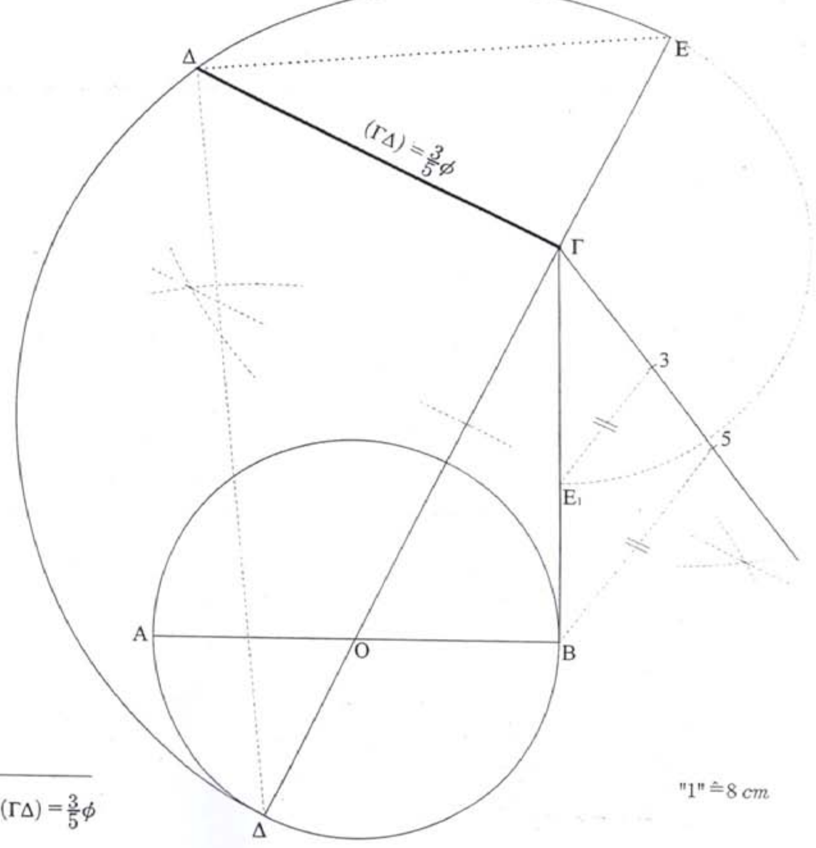
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ (ΓΔ) ΑΠΟ ΤΗ ΣΧΕΣΗ $(Γ\Delta)^2 = 3/5\,\phi$

1. Γράφεται κύκλος Ο, $d = AB =$ "1", ΒΓ εφαπτομένη στο Β, (ΒΓ) = "1" και σύρεται η ευθεία ΓΟ που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο σημείο Δ.

   Είναι, ως γνωστόν, $(Γ\Delta) = \phi$

2. Προσδιορίζονται τα 3/5 του (ΒΓ) = "1" με το θεώρημα των παρ/λων
3. Επεκτείνεται το ΓΔ κατά το (ΓΕ) = 3/5(ΒΓ)
4. Γράφεται κύκλος με διάμετρο το ΔΕ στο σημείο Γ, που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο σημείο Δ

Το μήκος (ΓΔ) είναι το ζητούμενο, δοθέντος ότι .... $(Γ\Delta)^2 = (ΓΕ) \times (Γ\Delta) = \frac{3}{5}\phi$

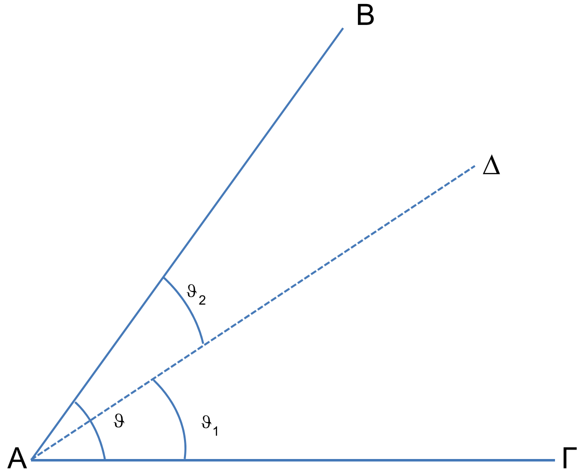


Σχ. 1α

2.3 Χρυσή τομή γωνίας

Κατ' αντιστοιχία με την διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο ("χρυσή τομή") των αρχαίων Ελλήνων θα μπορούσε να θέσει κανείς – **ως πρόβλημα** – και την διαίρεση μιας τυχαίας επίπεδης ή δίεδρης γωνίας κατά τον ίδιο λόγο.

$$\frac{\widehat{\Gamma A \Delta}}{\widehat{\Delta A B}} = \frac{\widehat{B A \Gamma}}{\widehat{\Gamma A \Delta}} = \phi \quad \text{ή} \quad \frac{\hat{\vartheta}_1}{\hat{\vartheta}_2} = \frac{\hat{\vartheta}}{\hat{\vartheta}_1} = \phi$$



Δεν γνωρίζουμε αν έχει τεθεί μέχρι σήμερα το ως άνω πρόβλημα.

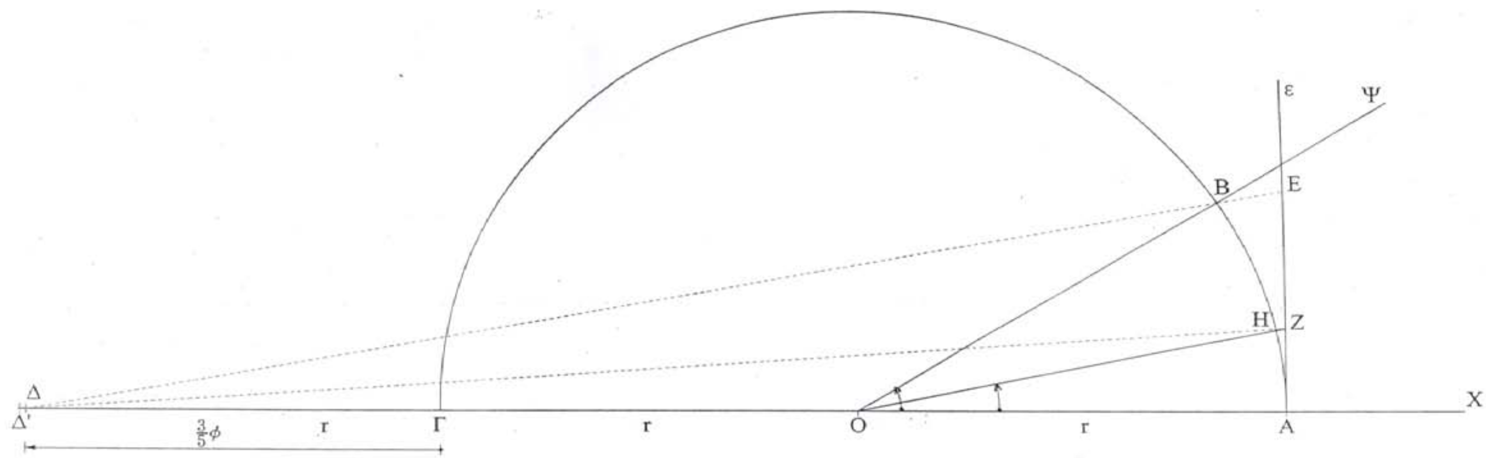
Διερωτάται, κατ' αρχάς, κανείς αν ως πρόβλημα και ως λύση έχει κάποιο ενδιαφέρον πέραν της αυτονόητης σημασίας του στη θεωρία των αναλογιών. Ίσως πρέπει να αναζητηθούν πιθανές χρήσεις και εφαρμογές ανάλογες της χρυσής τομής ευθύγραμμων τμημάτων, στην Γεωμετρία, στην Μηχανική, στην Αρχιτεκτονική, στην Αισθητική, στις Τέχνες γενικώς και γενικότερα ακόμη στη Φύση (λ.χ. στην οπτική στον φωτισμό ενός αντικειμένου). Όλα αυτά όμως εκφεύγουν της παρούσας εργασίας.

Στο ερώτημα αν υπάρχει η δυνατότητα να διαιρεθεί – απόλυτα – δεδομένη γωνία κατά τον λόγο της χρυσής τομής με μόνο την χρήση κανόνα και διαβήτη, προφανώς η απάντηση είναι αρνητική.

Είναι όμως δυνατό αυτό να γίνει, κατά μεγάλη προσέγγιση, με τρόπο που προτείνεται και για την τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας. *(Σχ. 2).*

Συγκεκριμένα, δεν έχουμε παρά να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ με κανόνα και διαβήτη, κατά τον λόγο της χρυσής τομής, οπότε – κατά τον ίδιο τρόπο όπως και στην τριχοτόμηση – προκύπτουν οι αντίστοιχες δύο γωνίες που έχουν ως άθροισμα τους την δοθείσα προς διαίρεση γωνία και η μεταξύ τους σχέση είναι ο λόγος της χρυσής τομής (ϕ).

ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ, ΚΑΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



Σχ. 2

"1" ≙ 8 *cm*

Για την "χρυσή τομή" γωνίας $X\hat{O}\Psi$
ακολουθείται **η ίδια διαδικασία**, όπως και στην τριχοτόμηση, **με την**
διαφορά, το ευθύγραμμο **τμήμα** ΑΕ διαιρείται – με έναν **από τους**
γνωστούς τρόπους – κατά τον λόγο της χρυσής τομής (ϕ) **και** έτσι προκύπτει το σημείο Ζ, ώστε $\frac{AE}{AZ} = \phi$

Η ευθεία ΟΗ που προκύπτει, κατ' εφαρμογή των ανωτέρω, **αποτελεί** την "χρυσή τομή" της $X\hat{O}\Psi$
$\left[\frac{H\hat{O}\Psi}{H\hat{O}X} = \frac{X\hat{O}\Psi}{H\hat{O}\Psi} = \phi\right]$ κατά προσέγγιση με, σφάλμα που προκύπτει **αριθμητικά**, μικρότερο του $\frac{1}{3600}$ **της μοίρας**.

Όπως και στην προτεινόμενη λύση της τριχοτόμησης και για τους ίδιους λόγους επίτευξης της προσέγγισης με σφάλμα της τάξης του $\frac{1}{60\times 60}=\frac{1}{3600}$ της μοίρας, χρησιμοποιείται η διάκριση των τριών περιοχών ①, ② και ③ αντιστοίχως.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι το πρόβλημα της διαίρεσης τυχαίας γωνίας κατά τον λόγο της χρυσής τομής (ϕ) μπορεί να γίνει με την τετραγωνίζουσα / τριχοτομούσα καμπύλη του Ιππία και με την έλικα του Αρχιμήδη, μόνο που οι καμπύλες αυτές δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη !

3. Επίλογος

Με δεδομένο ότι το πρόβλημα γενικά της διαίρεσης τυχαίας γωνίας – αποκλειστικά – με την χρήση κανόνα και διαβήτη είναι άλυτο, το μόνο που απέμεινε ήταν αν μπορούν να εξευρεθούν αξιόπιστες γεωμετρικές λύσεις με την μεγαλύτερη δυνατή προσέγγιση.

Σ’ αυτή τη βάση προτείνεται η παρούσα λύση.

Μια βάση που σέβεται τον τρόπο με τον οποίο τέθηκε από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και φιλόσοφους – μόνον αποκλειστικά ευθείες γραμμές (κανόνας) και κύκλοι (διαβήτης). Κατ’ αυτόν τον τρόπο, μια απλή γεωμετρικά λύση όπως η προτεινόμενη, με την οποία επιτυγχάνεται μεγάλη προσέγγιση, επιτρέπει σε κάποιον να ισχυριστεί “τρόπον τινά” ότι δικαιώνεται σ’ έναν βαθμό η μορφή με την οποίαν τέθηκε το εν λόγω πρόβλημα στην αρχαιότητα· ότι υπάρχει δηλαδή “παραδεκτή οριακή λύση” αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη, εξαντλώντας – κατά τρόπον πρακτικά αποδεκτό – τις δυνατότητες των βασικών αυτών γεωμετρικών οργάνων.

Πρόκειται για μία προσπάθεια προκειμένου να αποδειχθεί, κατά τρόπο απλό και πρακτικό, πως η χρήση κανόνα και διαβήτη που θεσπίσθηκε **"φιλοσοφικά"** από του αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες, δεν είχε… περιορισμένες δυνατότητες, αλλά μπορεί να οδηγήσει το περίφημο αυτό πρόβλημα σε λύσεις που προσεγγίζουν αρκετά ικανοποιητικά τις απόλυτες λύσεις.

Ως μεθοδολογία η προτεινόμενη λύση θεωρούμε ότι παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον και με την έννοια αυτή θα μπορούσε ίσως να διδάσκεται στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη μέση Εκπαίδευση. Η χρήση / συμβολή της “χρυσής τομής”, που αποτελεί συστατικό στοιχείο της όλης μεθοδολογίας, ενισχύει ακόμη περισσότερο αυτή την άποψη. Πιστεύουμε ότι μία τέτοιου είδους διδασκαλία θα έχει εκπαιδευτική αξία σε συνδυασμό με τις εκτός κανόνα και διαβήτη, σπουδαίες λύσεις των αρχαίων Ελλήνων. Και με την έννοια αυτή, η όλη πρόταση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μικρή συμβολή στην γενικότερη προσπάθεια να επανέλθει η συστηματικότερη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη χώρα μας. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διδάσκεται συστηματικά η Γεωμετρία και αυτό τονίζεται από πολλούς και από πολλές πλευρές.

Τέλος, η εργασία αυτή ας θεωρηθεί, ως ελάχιστο αφιέρωμα στην ΡΙΤΣΑ ΠΟΥΡΝΑΡΑ, που υπηρέτησε με ζήλο και αφοσίωση τον Τομέα της Χαρτογραφίας.

Βιβλογραφία

1. Δ. Τσιμπουράκη : *Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και οι Εργάτες της στην ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ*, 1985
2. Ν. Αρτεμιάδης : *Ιστορία των Μαθηματικών / Ακαδημία Αθηνών*, 2000
3. RICHARD MANKIEWICZ : *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, 2002
4. MARIO LIVIO : *Ο Χρυσός Λόγος*, 2005
5. IAN STEWART : *Ο Γκαλουά και το Κλειδί της Συμμετρίας*, 2007
6. Ε. Σπανδάγου : *Αρχιμήδους, Βίος και Έργον*, 2011
7. SCOTT OLSEN : *Η Χρυσή Τομή*, 2012