

## Εντοπισμός Ακανόνιστου Αποτυπώματος Στόχων μέσω Έλλειψης σε Ψηφιακή Εικόνα Προερχόμενη από Επεξεργασία Σήματος ISAR ραντάρ

**Χ. Λιάμπας, Κ. Τσούρος**

*Γενικό Τμήμα-Πολυτεχνική Σχολή-Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη, Ελλάδα*

*Christos.Liambas@gmail.com, Tsouros@auth.gr*

### **Περίληψη**

Στα πλαίσια του άρθρου αυτού αναπτύσσεται αλγόριθμος για τον αυτόματο εντοπισμό ακίνητων και κινούμενων στόχων στη ψηφιοποιημένη εικόνα από ISAR (Inverse Synthetic Aperture Radar) ραντάρ. Επιπλέον, υπολογίζεται έλλειψη ίσου εμβαδού με τον στόχο έχοντας τη μέγιστη δυνατή επικάλυψη με αυτόν, ώστε να προσδιοριστεί το σημείο πρόκλησης μέγιστου πλήγματος του στόχου (Σημείο Μηδέν). Ένα δύσκολο πρόβλημα (NP-Hard) στο οποίο υπεισέρχονται δυσεπίλυτα θέματα λόγω γεωμετρικών παραμορφώσεων που οφείλονται στις μη ιδανικές συνθήκες εκμετάλλευσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

## Spotting Irregular Target Prints Via Ellipse in Digital Image Produced by Signal Processing of ISAR radar

**C. Liambas, C. Tsouros**

*Dept. of Math., Physical and Comp. Sciences-Engineering School-AUTH, Thessaloniki, Greece*

*Christos.Liambas@gmail.com, Tsouros@auth.gr*

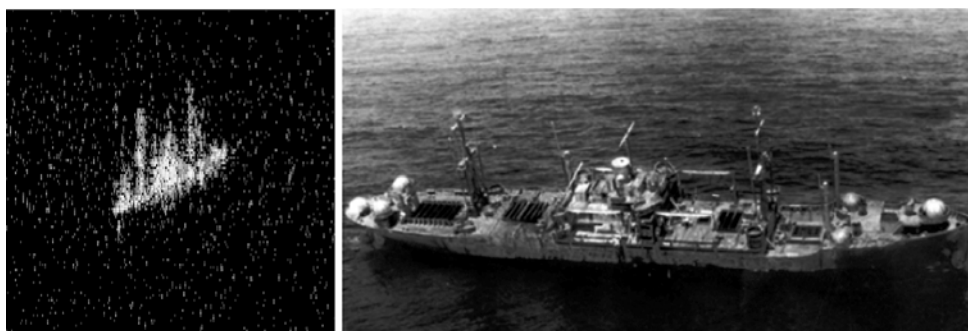
### **Abstract**

Within this context, an algorithm is developed for the automated tracking of static and moving targets from a digital image, produced by an ISAR radar (Inverse Synthetic Aperture Radar). Furthermore, an ellipse is calculated with area equal to the area of the target, having the maximum possible overlap with it, for the determination of the maximum damage point (Zero Point). A demanding problem (NP-Hard) where inconvenient issues are produced due to geometric deformations which appear during the analysis of electromagnetic waves (diffraction and propagation problems).

## 1. Εισαγωγή

Σε αρκετές εφαρμογές, κυρίως στρατιωτικές συμπεριλαμβανομένων της μετεωρολογικής πρόγνωσης (Yan et al., 2001), της μέτρησης μέσω θαλάσσιων κυμάτων (Gangeskar, 2002), του ελέγχου του εναερίου χώρου, του ελέγχου της ταχύτητας των αυτοκινήτων κ.α., συναντώνται δυσκολίες στην ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων προερχόμενα από ειδικά διαμορφωμένες ηλεκτρονικές συσκευές υπό την ονομασία ραδιοεντοπιστές-ραντάρ (Radio Detection And Ranging). Η ανάπτυξη τους έλαβε χώρα κατά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο προκαλώντας ανατροπές στο θέατρο των επιχειρήσεων<sup>1</sup>. Έκτοτε, αρκετές μελέτες πραγματεύονται την ερμηνεία των δεδομένων από τα λαμβανόμενα σήματα σε πραγματικό περιβάλλον που αποτελεί ένα πολυπαραγοντικό σύστημα, το οποίο δεν επιδέχεται αναλυτική επίλυση (Cakoni et al., 2005 και Borden, 2002).

Σε κάθε περίπτωση υπήρχε η ανάγκη για γρήγορη και αξιόπιστη πληροφόρηση αλλά ταυτοχρόνως δημιουργήθηκε και η άποψη πως η εικόνα του στόχου σε συνδυασμό με το στίγμα του θα πρόσδιδε νέες επιχειρησιακές δυνατότητες. Έτσι, αναπτύχθηκε το ISAR ραντάρ (Inverse Synthetic Aperture Radar) μέσω του οποίου υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας ψηφιακών εικόνων υψηλής ανάλυσης που απεικονίζουν τους στόχους εξάγοντας χρήσιμες πληροφορίες (Sullivan, 2000). Επίσης, αναπτύχθηκαν τεχνικές για την βελτίωση της αποτύπωσης των στόχων όσο και για τον περαιτέρω εντοπισμό τους (tracking) ακόμα και στην περίπτωση τακτικού ελιγμού, χρησιμοποιώντας συστήματα διαφορικών εξισώσεων που εξαρτώνται από το χρόνο (Rong Li et al., 2005 και Cheney, 2001).



**Εικόνα 1.** Η προκύπτουσα εικόνας (αριστερά) της κανονιοφόρου USS Crockett (δεξιά) από ISAR ραντάρ εγκατεστημένο σε P-3 αεροσκάφος. (US Naval Research

<sup>1</sup> “μάχης της Αγγλίας” που αποκλήθηκε η απόπειρα καταστροφής της RAF από τη Luftwaffe

Γι' αυτό το λόγο, η παρούσα μελέτη προσανατολίζεται τόσο στον αυτόματο εντοπισμό ακίνητων και κινούμενων στόχων μέσω ψηφιοποιημένης εικόνας όσο και στην εύρεση του βέλτιστου σημείου πλήξης του στόχου μέσω της έλλειψης που τον επικαλύπτει στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Συνεπώς, με μια σύντομη προεπισκόπηση, στο Κεφάλαιο 1 λαμβάνει χώρα ο ορισμός του προβλήματος και ο προτεινόμενος αλγόριθμος επίλυσης του ενώ στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας δεδομένα από τον πραγματικό κόσμο. Τέλος, στο Κεφάλαιο 3 γίνεται λόγος για τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας και τα θέματα που απορρέουν από αυτήν για περαιτέρω διερεύνηση.

## 2. Ορισμός του προβλήματος

Από ψηφιοποιημένη εικόνα υψηλής ανάλυσης που περιέχει έναν ή περισσότερους στόχους, οι οποίοι είναι ακίνητοι ή κινούμενοι και παρουσιάζουν ακανόνιστο σχήμα υπό παρουσία θορύβου και γεωμετρικής στρέβλωσης ζητούνται τα εξής:

- i) Εστίαση στις περιοχές ενδιαφέροντος –στόχους– της εικόνας (Regions of Interest).
- ii) Καταμέτρηση και εντοπισμός των στόχων.
- iii) Υπολογισμός έλλειψης (ή κύκλου) ίσου εμβαδού με τον στόχο.
- iv) Μέγιστη δυνατή επικάλυψη κάθε στόχου με την αντιστοιχη έλλειψη.
- v) Υπολογισμός του βέλτιστου σημείου πλήξης του στόχου.
- vi) Μηδενική πιθανότητα λανθασμένου εντοπισμού (zero false alarm).
- vii) Υπολογισμό σε πραγματικό χρόνο.

Η ψηφιοποιημένη εικόνα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1, προκύπτει μέσω επεξεργασίας σήματος ISAR ραντάρ που παράγεται σύμφωνα με την (Levitas et al., 2005):

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = A \int E(\vec{k}) e^{2j\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad (1.1)$$

η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης του Helmholtz με

$\vec{k}$  : το διάνυσμα μήκους κύματος

$\vec{r}$  : το διάνυσμα της ακτίνας σε κάθε σημείο του στόχου

A : συχνότητα (ανεξάρτητος συντελεστής)

$\hat{\rho}(\vec{r})$  : η τετραγωνική ρίζα του RCS (Radar Cross Section)

$E(\vec{k})$  : το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου που λαμβάνεται για κάθε γωνία σκέδασης από τον στόχο

Στη συνέχεια αναπαριστώντας τα  $\vec{k}$  και  $\vec{r}$  με πολικές και καρτεσιανές συντεταγ-

μένες προκύπτει η εξής σχέση:

$$\hat{\rho}(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} E_\theta(\omega) |\omega| e^{2j\omega(x \cos\theta + y \sin\theta)} d\omega d\theta \quad (1.2)$$

Ο λόγος για τον οποίο γίνεται χρήση των ISAR ραντάρ είναι διότι προσφέρουν πληθώρα πλεονεκτημάτων έναντι των συμβατικών. Αναφορικά, τα ISAR ραντάρ παρέχουν (Cheney, 2005):

- i) Συνεχή και αδιάλειπτη πληροφορία μέρα και νύχτα.
- ii) Εικόνα υψηλής ανάλυσης.
- iii) Λειτουργία κάτω από οποιοσδήποτε συνθήκες καιρού.
- iv) Διαπερατότητα σε σύννεφα και σε καπνό.
- v) Εν δυνάμει διαπερατότητα σε φυλλώματα, δίχτυα παραλλαγής και σε κτίρια.
- vi) Ακριβείς μετρήσεις αποστάσεων.
- vii) Ευαισθησία ακόμα και σε αντικείμενα με τάξη μεγέθους εκατοστών (cm) και μέτρων (m).
- viii) Μέτρηση ταχύτητας (διαφορά αποστάσεων).

Παρά το μεγάλο πλήθος πλεονεκτημάτων, το δοθέν πρόβλημα παρουσιάζει τις εξής δυσκολίες:

- i) Υψηλή παρουσία θορύβου.
- ii) Ακανόνιστο αποτύπωμα στόχων σε υψηλό βαθμό και περαιτέρω γεωμετρική στρέβλωση.
- iii) Πολυμορφία στόχων.
- iv) Η μέγιστη δυνατή επικάλυψη της έλλειψης που προσεγγίζει τον στόχο είναι δύσκολο πρόβλημα (NP-Hard) (Leung, 2006).
- v) Υψηλή ανάλυση εικόνας συνεπάγεται μεγάλο πλήθος δεδομένων.
- vi) Περιορισμένη υπολογιστική ισχύς.

### 3. Προγενέστεροι μέθοδοι

Είναι γνωστό πως τα προβλήματα επικάλυψης (covering problems) και συγκεκριμένα η επικάλυψη πολυγωνικών περιοχών από τετράγωνα έχει αποδειχθεί πως ανήκει στην κλάση των NP-complete προβλημάτων (Culberson, 1994). Ομοίως, το πρόβλημα της επικάλυψης μιας περιοχής με έλλειψη πρέπει να ανήκει στην κλάση των NP-hard προβλημάτων, αν και δεν έχει επισήμως αποδειχθεί μέχρι στιγμής (Leung, 2006). Έτσι λοιπόν, υπάρχουν δύο ειδών μέθοδοι για την αντιμετώπιση του εν λόγω προβλήματος.

Στην πρώτη περίπτωση, πραγματοποιείται η επικάλυψη κάθε περιοχής από μία

έλλειψη, όπως συμβαίνει και στον προτεινόμενο αλγόριθμο. Σύμφωνα με την Ji (1999), δεδομένου ενός συνόλου από μικρές περιοχές ψηφιακών τόξων, μέσω γεωμετρικών και στατιστικών κριτηρίων επιλέγονται τα πιθανά ζεύγη των τόξων που ανήκουν στην ίδια έλλειψη. Στη δεύτερη περίπτωση, οι επιστήμονες εστιάζουν στην εφαρμογή ελαχίστου πλήθους ελλείψεων σε μια περιοχή. Για παράδειγμα, στην Efrat (2003) όπου ένα σύνολο από απαραίτητα σημεία επικαλύπτονται από ελλείψεις με παράλληλους άξονες και ταυτόχρονα απορρίπτουν ένα δεύτερο σύνολο από απαγορευμένα σημεία.

Εν συνεχεία, μεγάλο εύρος επιστημονικών εργασιών χρησιμοποιούν το μετασχηματισμό Hough (Hough, 1962). Ωστόσο, επισημαίνεται η αδυναμία του συγκεκριμένου μετασχηματισμού, διότι λόγω της εξαντλητικής επεξεργασίας συνδυασμών κρίνεται απαγορευτικός σε μεγάλης κλίμακας δεδομένα (Jianfei et al., 2006).

Επίσης, μεγάλη κατανάλωση υπολογιστικής ισχύος συναντάται στον αλγόριθμο επικάλυψης αστεροειδών με μία έλλειψη από τη NASA (National Aeronautics and Space Administration Goddard IDL program library, 2008), αφού απαιτείται η επεξεργασία κάθε εικονοστοιχείου (pixel) της ψηφιακής εικόνας για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος, ο οποίος ταυτόχρονα εισάγει μια καινοτόμο μέθοδο εκμετάλλευσης της πληροφορίας, έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τη μέθοδο της NASA (Liambas and Tsouros, 2008):

- i) διαχωρίζει τις περιοχές ενδιαφέροντος που περιέχονται στην ψηφιακή εικόνα (segmentation).
- ii) ελέγχει μόνο ένα μικρό αριθμό εικονοστοιχείων της εικόνας, οπότε η επεξεργασία τους με αποδοτικό τρόπο οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος σε πραγματικό χρόνο, ακόμα και στις περιπτώσεις εικόνων υψηλής ανάλυσης (μεγάλο πλήθος δεδομένων).

Συνοψίζοντας, η παρούσα εργασία αποτελεί συνέχεια της μεθόδου που περιγράφεται στην Liambas and Tsouros (2008) διατηρώντας τα παραπάνω πλεονεκτήματα αλλά εμπλουτισμένη με επιπλέον δυνατότητες και προσανατολισμένη για ανάλυση εικόνων προερχομένων από επεξεργασία σήματος ISAR ραντάρ.

## 4. Αλγόριθμος

Σύμφωνα με τον ορισμό του προβλήματος, παρουσιάζεται η μέθοδος βάσει της οποίας επιλύονται τα θέματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.1. Έτσι λοιπόν έχει αναπτυχθεί αλγόριθμος που υπολογίζει τρεις (3) ελλείψεις για κάθε περιοχή ενδιαφέροντος (στόχο) της ψηφιακής εικόνας. Η εγγεγραμμένη έλλειψη  $E_i$  που είναι η μεγαλύτερη δυνατή έλλειψη που περιέχεται στην περιοχή ενδιαφέροντος, η περιγεγραμμένη

έλλειψη  $E_c$  που είναι η μικρότερη δυνατή έλλειψη που περιέχει την περιοχή ενδιαφέροντος και η έλλειψη προσέγγισης  $E_a$  που είναι η έλλειψη που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της περιοχής ενδιαφέροντος και τη μέγιστη δυνατή επικάλυψη με αυτή.

Τελικός σκοπός είναι να εφαρμοστεί κατάλληλα η έλλειψη  $E_a$  στην περιοχή ενδιαφέροντος (ROI) ελέγχοντας το μικρότερο δυνατό αριθμό εικονοστοιχείων και ταυτόχρονα μεγιστοποιώντας την απόδοση του αλγορίθμου. Η ερμηνεία αυτής της πολλά υποσχόμενης πρότασης λαμβάνει χώρα αργότερα με τη βοήθεια των τεχνικών βελτιστοποίησης.

Ο αλγόριθμος αποτελείται από έξι (6) βασικές φάσεις, οι οποίες αναλύονται στα εδάφια που ακολουθούν. Αρχικά ορίζονται, η  $b_{\min}$  παράμετρος που αντιστοιχεί στο μικρότερο δυνατό μικρό άξονα των πιθανών ελλείψεων που θα εξεταστούν και η  $\omega$  παράμετρος που δηλώνει τον βαθμό του ακανόνιστου περιγράμματος. Θα πρέπει να τονιστεί πως οι μεταβλητές αυτές δεν είναι δεσμευτικές, δηλαδή η  $b_{\min}$  παράμετρος ( $\geq 3$  pixels) μπορεί να οριστεί μικρότερη απ' ό,τι ο πραγματικός μικρός άξονας των πιθανών ελλείψεων που εμπεριέχονται στην ψηφιακή εικόνα. Ομοίως, η  $\omega$  παράμετρος ( $\geq 0$  pixels) ουσιαστικά περιγράφει τον βαθμό ανωμαλίας του περιγράμματος από το ακανόνιστο σχήμα και μπορεί να οριστεί μεγαλύτερη απ' ό,τι ο πραγματικός βαθμός ανωμαλίας του περιγράμματος. Έτσι λοιπόν, όταν δηλωθεί  $\omega = 0$ , η εφαρμογή θα απαιτεί να εντοπιστούν μη ακανόνιστα σχήματα, δηλαδή τέλειες ελλείψεις ή τέλειοι κύκλοι. Γι' αυτό το λόγο, οι παραπάνω παράμετροι εξαρτώνται από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε συγκεκριμένα δεδομένα χωρίς να είναι περιοριστικοί. Συνοψίζοντας, η  $b_{\min}$  παράμετρος ορίζει το κάτω όριο στο μέγεθος του μικρού άξονα των ελλείψεων που ενδέχεται να υπάρχουν στην εικόνα και η  $\omega$  παράμετρος ορίζει το άνω όριο στο βαθμό ανωμαλίας του περιγράμματος.

#### 4.1. Πρώτη φάση του αλγορίθμου

Στην πρώτη φάση του αλγορίθμου πραγματοποιείται η προετοιμασία των δεδομένων προς επεξεργασία και συγκεκριμένα συμβαίνουν τα εξής:

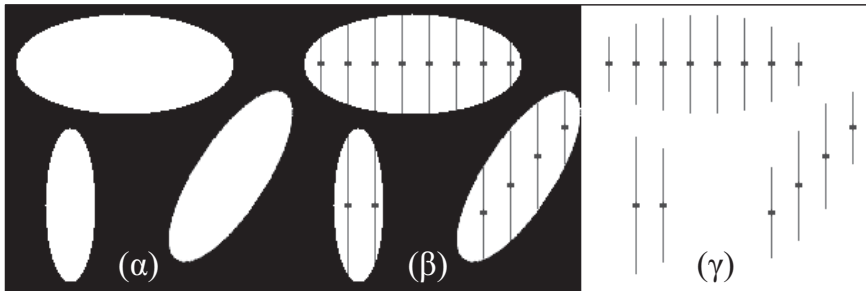
- η εικόνα μετατρέπεται από έγχρωμη σε ασπρόμαυρη (με 256 διαβαθμίσεις του γκρι) σύμφωνα με την Malik (2004).
- εξομάλυνση των ακμών (smoothing) σύμφωνα με τη μέθοδο του Gauss (Gonzalez, 2005).
- επεξεργασία ιστογράμματος για τον εντοπισμό του ορίου (threshold) και τη μετατροπή της εικόνας σε ασπρόμαυρη με βάθος χρώματος 1 bit. Η περιοχή ενδιαφέροντος έχει λευκό χρώμα και το φόντο μαύρο. Κατά την Sonka (1999), εντοπίζεται ένα τοπικό ελάχιστο στο ιστογράμμα το οποίο ορίζεται ως σημείο διαχωρισμού (σημείο Q) για τη μετατροπή της εικόνας σύμφωνα με τη σχέση ( $f(x, y)$ ) είναι η συνάρτηση απεικόνισης της εικόνας):

$$f(x, y) = \begin{cases} 255, & f(x, y) \geq Q \\ 0, & f(x, y) < Q \end{cases} \quad (1.3)$$

Τα παραπάνω θεωρούνται απαραίτητα στο στάδιο της προεπεξεργασίας αφού ο αλγόριθμος απαιτεί τα ακανόνιστα σχήματα (στόχοι) που θα εντοπιστούν να είναι συμπαγείς περιοχές με απουσία θορύβου.

#### 4.2. Δεύτερη φάση του αλγορίθμου

Στη δεύτερη φάση του αλγορίθμου πραγματοποιείται δειγματοληψία μικρού αριθμού σημείων από όλη την εικόνα. Αυτά τα σημεία χαρακτηρίζονται ως κρίσιμα γιατί θα αποτελέσουν τη βάση για τους υπολογισμούς που ακολουθούν. Συγκεκριμένα, ελέγχεται ένα μικρό υποσύνολο κατακόρυφων ευθειών από όλες τις κατακόρυφες ευθείες που απαρτίζουν την εικόνα και υπολογίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα με λευκό χρώμα. Έτσι, αυτά τα λευκά ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται εντός των περιοχών ενδιαφέροντος, όπως φαίνεται στην ιδανική περίπτωση των τριών (3) τέλειων ελλείψεων της Εικόνας 2. Συνεπώς, τα αποτελέσματα των υπολογισμών (κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα με τα κέντρα τους) όπως φαίνονται στις Εικόνες 2β και 2γ αντανακλούν προσεγγιστικά τη θέση αλλά και το μέγεθος των σχημάτων.



Εικόνα 2. Τα δεδομένα της εικόνας (α) και τα αντίστοιχα στάδια (β,γ) της επεξεργασίας της από τον αλγόριθμο.

Η βασική μας θεώρηση είναι πως ο μέγιστος δυνατός εγγεγραμμένος κύκλος σε κάθε έλλειψη πρέπει να τέμνεται τουλάχιστον από δύο γειτονικές κατακόρυφες ευθείες κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας. Αυτό συμβαίνει ορίζοντας τον βηματισμό  $\sigma$  μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών, να υπολογίζεται από τη (1.4) η οποία είναι απόρροια του Θεωρήματος 1 και των τεχνικών βελτιστοποίησης.

$$\sigma = (b_{\min} - 1) \quad (1.4)$$

Θεώρημα 1:

Έστω στο επίπεδο  $Z_+^2$  ένα σύνολο από κατακόρυφες ευθείες

$$\Phi = \{x_i\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{N}{\sigma} \right\rceil$$

με  $N$  άνω φράγμα του  $\Phi$  και  $x_i = i * \sigma$

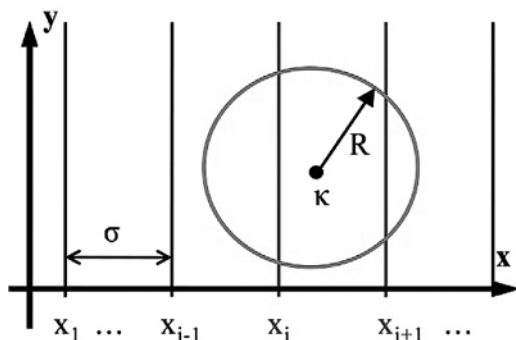
όπου  $\sigma \in Z_+^*$  είναι μια σταθερή μεταβλητή και

$c$  κύκλος με κέντρο  $\kappa$  και ακτίνα  $R$ .

Τότε, τουλάχιστον δύο γειτονικές κατακόρυφες ευθείες του συνόλου  $\Phi$  τέμνουν τον κύκλο  $c$  αν και μόνο αν  $\sigma < R$ .

*Απόδειξη*

Έστω ότι δύο κατακόρυφες γειτονικές ευθείες  $x_i, x_{i+1}$  τέμνουν τον κύκλο  $c$  όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.



**Εικόνα 3.** Δύο κατακόρυφες γειτονικές ευθείες  $x_i, x_{i+1}$  οι οποίες τέμνουν τον κύκλο  $c$ .

*Περίπτωση 1:* Έστω  $\sigma > R$

Αυτό δηλώνει πως  $d(x_i, x_{i+1}) > R$ . Αλλά ισχύει το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

Εάν το σημείο  $\kappa$  (κέντρο του κύκλου) έχει τετμημένη ίση με το γινόμενο  $i * \sigma$ , τότε το  $\kappa$  ανήκει σε μια κατακόρυφη ευθεία  $x_i$ . Επίσης,  $x_{i+1} = (i + 1) * \sigma$ . Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} d(\kappa, x_{i+1}) &= |(i * \sigma) - (i + 1) * \sigma| \Leftrightarrow d(\kappa, x_{i+1}) = |(i * \sigma) - (i * \sigma + \sigma)| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(\kappa, x_{i+1}) = |-\sigma| \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} d(\kappa, x_{i+1}) &= \sigma \\ \text{Όμως εκ της υποθέσεως } \sigma &> R \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(\kappa, x_{i+1}) > R$$



Επομένως, η κατακόρυφη ευθεία  $x_{i+1}$  δεν τέμνει τον κύκλο  $c$ . Ομοίως και η ευθεία  $x_{i-1}$  δεν τέμνει τον κύκλο  $c$ . Άτοπο αφού οι δύο γειτονικές κατακόρυφες ευθείες πρέπει να τέμνουν τον κύκλο. Συνεπώς, η υπόθεση  $\sigma > R$  απορρίπτεται.

*Περίπτωση 2:* Έστω  $\sigma = R$ .

Ομοίως με την περίπτωση 1 έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} d(\kappa, x_{i+1}) = \sigma \\ \text{Αλλά } \sigma = R \end{array} \right\} \Rightarrow d(\kappa, x_{i+1}) = R$$

Έτσι, η κατακόρυφη ευθεία  $x_{i+1}$  εφάπτεται με τον κύκλο  $c$ . Άρα και η περίπτωση  $\sigma = R$  απορρίπτεται.

*Περίπτωση 3:* Έστω  $\sigma < R$ . Τότε,

$$d(x_i, x_{i+1}) < R \Leftrightarrow d(x_i, \kappa) + d(\kappa, x_{i+1}) < R \Leftrightarrow d(\kappa, x_{i+1}) < R - d(x_i, \kappa)$$

Πρέπει όμως,  $0 < R - d(x_i, \kappa)$  (αφού  $0 < d(\kappa, x_{i+1})$  και η περίπτωση ίση με το μηδέν έχει ήδη απορριφθεί) άρα  $R > d(x_i, \kappa)$  δηλαδή η  $x_i$  κατακόρυφη ευθεία τέμνει τον κύκλο  $c$ . Επίσης,

$$\left. \begin{array}{l} d(\kappa, x_{i+1}) < R - d(x_i, \kappa) \\ 0 \leq d(x_i, \kappa) < R \end{array} \right\} \Leftrightarrow d(\kappa, x_{i+1}) < R$$

Οπότε, και η κατακόρυφη ευθεία  $x_{i+1}$  τέμνει τον κύκλο  $c$ . Άρα η υπόθεση μας είναι αληθής. Συνεπώς,  $\sigma < R$ .

Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, ότι αν  $\sigma < R$  τότε δύο τουλάχιστον κατακόρυφες γειτονικές ευθείες  $x_i, x_{i+1}$  τέμνουν τον κύκλο  $c$  όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.

Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαίο να επισημανθεί πως η ανισότητα που αποδείχθηκε βάσει του Θεωρήματος 1, θα χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τις τεχνικές βελτιστοποίησης που θα αναλυθούν σε επόμενη παράγραφο για τον υπολογισμό της (1.4).

Άρα λοιπόν, ο αλγόριθμος ελέγχει σε πλήθος  $\left\lceil \frac{\text{Πλάτος Εικόνας}}{\sigma} \right\rceil$  κατακόρυφες ευθείες και υπολογίζει τα λευκά ευθύγραμμα τμήματα που μπορεί να υπάρχουν σε κάθε κατακόρυφη ευθεία  $L_j$  όπου  $j \in \left[ 1, \left\lceil \frac{\text{Πλάτος Εικόνας}}{\sigma} \right\rceil \right]$ . Έτσι, στην παρούσα φάση του αλγορίθμου έχουν υπολογιστεί όλα τα κατακόρυφα λευκά ευθύγραμμα τμήματα  $s_{ij}$  όπου  $j$  είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε γραμμή  $L_j$  και  $i$  είναι η

αρίθμηση του κάθε ευθύγραμμου τμήματος σε κάθε στήλη  $j$  (γραμμή  $L_j$ ).

Επιπλέον, μια γρήγορη διαδικασία αναλαμβάνει την ομαδοποίηση σε  $S_k$  ομάδες, των ευθυγράμμων τμημάτων  $s_{ij}$  τα οποία περιέχονται σε κάθε  $k$  έλλειψη και υπολογίζει τα μεσαία σημεία  $\mu_{ij}$  (μεσαία σημεία στην Εικόνα 2) του κάθε ευθύγραμμου τμήματος  $s_{ij}$ . Η ομαδοποίηση πραγματοποιείται ελέγχοντας αν η γραμμή που συνδέει τα δύο μέσα των δύο γειτονικών ευθυγράμμων τμημάτων – τα οποία ανήκουν σε διαφορετικές στήλες – έχει λευκό χρώμα. Αν είναι λευκή τότε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν στην ίδια έλλειψη και επανελέγχεται το μέσο του δεύτερου ευθυγράμμου τμήματος με το επόμενο (αν υπάρχει). Σε περίπτωση που δεν είναι λευκή η ευθεία τότε διακόπτεται η εισαγωγή νέων ευθυγράμμων τμημάτων στην ομάδα και συνεχίζει ο αλγόριθμος τον έλεγχο κατά τον ίδιο τρόπο.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς, λαμβάνοντας υπόψη τη βασική θεώρηση  $|S_k| \geq 2$ , ότι τουλάχιστον δύο γειτονικές κατακόρυφες ευθείες τέμνουν κάθε έλλειψη  $k$ . Συνεπώς, στο τέλος της δεύτερης φάσης του αλγορίθμου το πλήθος των ελλείψεων (στόχων) που περιέχονται στη ψηφιακή εικόνα είναι γνωστό (είναι ίσο με το πλήθος των ομάδων που έχουν δημιουργηθεί). Επίσης, είναι προσεγγιστικά γνωστά η θέση και το μέγεθος των ελλείψεων.

### 4.3. Τρίτη φάση του αλγορίθμου

Στην τρίτη φάση του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS model) υπολογίζεται μια αρχική γραμμή  $l_k$  (ευθεία παλινδρόμησης) με εξίσωση  $y = \alpha_k x + \beta_k$ , η οποία εφαρμόζει στα μεσαία σημεία  $\mu_{ij}$  των ευθυγράμμων τμημάτων  $s_{ij}$  που ανήκουν στην ίδια ομάδα  $S_k$ . Η υπολογισθείσα ευθεία αντιστοιχεί στο σχεδόν ακριβή μεγάλο ή μικρό άξονα της έλλειψης  $k$  και οι αντίστοιχες παράμετροι  $\alpha_k$  υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις (Weisberg, 2005):

$$|S_k| = n, \quad n \geq 2 \quad (1.5)$$

$$\mu_{i,j} = (x, y), \quad \forall s_{i,j} \in S_k \quad (1.6)$$

$$\alpha_k = \frac{n \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} y_{\xi} - \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} \sum_{\xi=1}^n y_{\xi}}{n \sum_{\xi=1}^n x_{\xi}^2 - \left( \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} \right)^2} \quad (1.7)$$

$$\beta_k = \frac{\sum_{\xi=1}^n y_{\xi} \sum_{\xi=1}^n x_{\xi}^2 - \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} y_{\xi}}{n \sum_{\xi=1}^n x_{\xi}^2 - \left( \sum_{\xi=1}^n x_{\xi} \right)^2} \quad (1.8)$$

#### 4.4. Τέταρτη φάση του αλγορίθμου

Στην τέταρτη φάση του αλγορίθμου με τη βοήθεια της διαδικασίας που εξάγει τα ακριβή αποτελέσματα (calibration procedure) υπολογίζεται η εγγεγραμμένη έλλειψη  $E_i$  για κάθε  $S_k$  ομάδα. Αυτό είναι και το πιο δαπανηρό τμήμα του αλγορίθμου κρίνοντας με βάση την κατανάλωση υπολογιστικής ισχύος.

Πρώτα απ' όλα, δημιουργείται μια αρχική έλλειψη για κάθε  $S_k$  ομάδα, με μικρό ημιάξονα  $b_{\min}$  και μεγάλο ημιάξονα  $|l_k|/2$  και περιστρεφόμενη κατά γωνία  $\text{εφ}(\alpha_k)$ . Η ιδέα είναι να μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν της αρχικής έλλειψης με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύψει όσο το δυνατόν περισσότερα λευκά σημεία εντός της περιοχής του ενδιαφέροντος. Γι' αυτό το λόγο, ο αλγόριθμος αυξάνει και τους δύο άξονες της αρχικής έλλειψης εναλλακτικά μέχρι ως ότου οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειας της να εφάπτεται στη μαύρη περιοχή (φόντο). Αν ένας από τους δύο άξονες συναντήσει μαύρο φόντο και σταματήσει να αυξάνεται τότε αυξάνεται μόνο ο άλλος άξονας μέχρι και εκείνος να συναντήσει μαύρο φόντο. Όταν η αύξηση των αξόνων σταματήσει, το κέντρο της έλλειψης αλλάζει σταδιακά και ταυτόχρονα η έλλειψη περιστρέφεται συνεκτιμώντας την παράμετρο  $\omega$  και τα ήδη υπολογισμένα ευθύγραμμα τμήματα που ανήκουν στην  $S_k$  ομάδα. Τα κέντρα της έλλειψης που είναι προς έλεγχο ανήκουν στην περιοχή που ορίζεται από το περιστρεφόμενο ορθογώνιο με γωνία  $\text{εφ}(\alpha_k)$  και πλευρές  $(2b_{\min}) \times (2\omega)$ . Το κέντρο του περιστρεφόμενου ορθογωνίου ταυτίζεται με το μεσαίο σημείο της αρχικής γραμμής  $l_k$ . Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρι να εντοπιστεί η μεγαλύτερη έλλειψη εντός της λευκής περιοχής και συγκεκριμένα αυτή η έλλειψη είναι η  $E_i$ . Η μέγιστη έλλειψη υπολογίζεται όταν μεγιστοποιείται το γινόμενο των δύο ημιάξονων.

Είναι πιθανό να συναντήσουμε την εξής ειδική περίπτωση όπου σε ιδιαίτερα ακανόνιστα σχήματα, δύο ή περισσότερες ελλείψεις  $E_j$  με  $j=1, 2, 3, \dots, m$  είναι δυνατόν να εφαρμόζονται στην ίδια περιοχή ενδιαφέροντος (οι ελλείψεις είναι οι μέγιστες δυνατές και έχουν το ίδιο εμβαδόν με διαφορετικό προσανατολισμό). Τότε, η εγγεγραμμένη έλλειψη  $E_i$  είναι η έλλειψη με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$\text{κέντρο:} \quad c_i = \frac{\sum_{j=1}^m c_j}{m} \quad (1.9)$$

$$\text{μεγάλος ημιάξονας:} \quad \alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m} \quad (1.10)$$

$$\text{μικρός ημιάξονας:} \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^m b_j}{m} \quad (1.11)$$

$$\text{γωνία προσανατολισμού: } \text{angle}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \text{angle}_j}{m} \quad (1.12)$$

#### 4.5. Πέμπτη φάση του αλγορίθμου

Στην πέμπτη φάση του αλγορίθμου υπολογίζεται η περιγεγραμμένη έλλειψη  $E_c$  για κάθε εγγεγραμμένη έλλειψη  $E_i$ . Αυτό συμβαίνει αυξάνοντας εναλλακτικά και τους δύο άξονες της εγγεγραμμένης έλλειψης  $E_i$  έως ότου κάθε σημείο της εξεταζόμενης έλλειψης να έχει μαύρο χρώμα (φόντο). Στο τέλος αυτής της φάσης είναι γνωστές οι εγγεγραμμένες και οι περιγεγραμμένες ελλείψεις κάθε περιοχής ενδιαφέροντος.

#### 4.6. Έκτη φάση του αλγορίθμου

Στην έκτη φάση, ο αλγόριθμος υπολογίζει το σύνολο των λευκών εικονοστοιχείων (pixels) στην περιοχή μεταξύ των  $E_i$  και  $E_c$  ελλείψεων. Το εμβαδόν της εγγεγραμμένης έλλειψης  $E_i$  αυξάνεται σύμφωνα με τον αριθμό των λευκών εικονοστοιχείων τα οποία σχετίζονται με το ακανόνιστο περίγραμμα της εξεταζόμενης περιοχής. Τελικά, προκύπτει η μέγιστη δυνατή επικάλυψη μεταξύ της έλλειψης  $E_a$  και της εξεταζόμενης λευκής περιοχής (στόχος). Το κέντρο της  $E_a$  είναι το βέλτιστο σημείο πλήξης του στόχου.

Θα πρέπει να αναφερθεί πως τα κέντρα των τριών (3) ελλείψεων που ορίστηκαν στην αρχή ταυτίζονται. Οπότε σε κάποιες περιπτώσεις όπου το σχήμα είναι ακανόνιστο σε μεγαλύτερο βαθμό από τη μια πλευρά σε σχέση με την άλλη η μέγιστη δυνατή επικάλυψη δεν υφίσταται από την  $E_a$ . Αυτό είναι επιθυμητό έχοντας ως παράδειγμα ένα στόχο με αποτύπωμα πλοίου στο ISAR ραντάρ όπου το σημείο πρόκλησης μέγιστου πλήγματος βρίσκεται στα έξαλα και ύφαλα του πλοίου χωρίς συνυπολογισμό των υπερκατασκευών του (πρόστεγο, μεσόστεγο, επίστεγο).

Συνεπώς, η θέση, το πλήθος και το μέγεθος των ελλείψεων που ερμηνεύουν τα ακανόνιστα σχήματα, τα οποία περιέχονται στην ψηφιακή εικόνα, είναι γνωστά μετά το πέρας της εκτέλεσης του αλγορίθμου.

## 5. Βελτιστοποίηση

Στη βελτιστοποίηση του αλγορίθμου, πρωταρχικό στόχο αποτελεί η μείωση του χρόνου επεξεργασίας, κάτι που οδηγεί στη δημιουργία μεγάλης έκτασης πηγαίου κώδικα (source code). Στην παραπάνω περιγραφή του αλγορίθμου έχει ήδη αναφερθεί η βασική τεχνική βελτιστοποίησης με την οποία μειώνεται δραματικά ο όγκος των δεδομένων που απαιτούν επεξεργασία, χωρίς να θυσιάζεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζει μια επιπλέον διακριτοποίηση -στην ήδη διακριτο-

ποιημένη ψηφιακή εικόνα<sup>2</sup> χρησιμοποιώντας τον βηματισμό  $\sigma$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ισχύει ότι  $\sigma < b$ , αλλά λόγω του γεγονότος πως χρειαζόμαστε τη μέγιστη δυνατή διακριτοποίηση, χωρίς τον κίνδυνο να αγνοηθεί κάποια περιοχή ενδιαφέροντος της εικόνας, η μέγιστη δυνατή τιμή του βηματισμού είναι  $\sigma = (b_{\min} -)$ . Έτσι, η ανισότητα του Θεωρήματος 1 σε συνδυασμό με την μέγιστη δυνατή ελαχιστοποίηση των δεδομένων οδηγεί στην (1.4). Ωστόσο, υπάρχουν κάποιοι θεωρητικοί περιορισμοί στους αλγόριθμους που ελέγχουν γραμμές (scanline algorithms) οι οποίοι αναφέρονται στην Fleury (1997). Όμως, οι εν λόγω αλγόριθμοι προτιμούνται διότι παραλληλοποιούνται εύκολα.

Επιπρόσθετη μέθοδο βελτιστοποίησης, είναι η προγραμματιστική τεχνική κατά την οποία ένας πίνακας περιέχει προεπεξεργασμένα αποτελέσματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων και κυρίως της εφαπτομένης, του ημιτόνου και συνημίτονου που χρησιμοποιούνται κατά κόρων στις αναγκαίες στροφές του συστήματος συντεταγμένων. Επειδή οι πράξεις κινητής υποδιαστολής απορροφούν αρκετή επεξεργαστική ισχύ, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τα προεπεξεργασμένα αποτελέσματα του πίνακα για κάθε γωνία μεταξύ των ακτινίων  $\theta$  και  $2\pi$ .

Ακόμα, υπάρχει σημαντική μείωση στο χρόνο επεξεργασίας όταν πραγματοποιούνται ακέραιες πράξεις (αποφυγή στρογγυλοποιήσεων) στην συνάρτηση της έλλειψης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Bresenham (1977). Συγκεκριμένα, επιτυγχάνεται ο υπολογισμός ακέραιων συντεταγμένων για την απεικόνιση (ή τον έλεγχο) μη γραμμικών συναρτήσεων (τόξων). Επιπλέον, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός της συμμετρίας της έλλειψης ως προς τους δύο άξονες απαιτούνται μόνο οι υπολογισμοί των σημείων ενός τεταρτημορίου μόνο (Kennedy, 2006).

Από την άλλη πλευρά, με τη συμβολή της μαθηματικής τεχνικής (Rousseuw, 2003) ο αλγόριθμος δύναται να χρησιμοποιεί τα σημεία  $m_{ij}$  που βρίσκονται κοντά στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων αγνοώντας τα σημεία που είναι απομακρυσμένα (ακραίες τιμές ή outliers). Έτσι, η ευθεία  $l_k$  είναι ακόμα πιο κοντά στον ακριβή μικρό ή μεγάλο άξονα της ζητούμενης έλλειψης  $E_i$  για κάθε ομάδα  $S_k$ , μειώνοντας τον αριθμό των περιστροφών (calibration procedure).

Οι παραπάνω τεχνικές βελτιστοποίησης επιτυγχάνουν το βέλτιστο αποτέλεσμα ελαχιστοποίησης του υπολογιστικού χρόνου αφού η επεξεργασία υψηλής ανάλυσης εικόνας που προέρχεται από ISAR ραντάρ λαμβάνει χώρα σε πραγματικό χρόνο ακόμα και στη χειρότερη περίπτωση (worst case). Επίσης, αυτό συμβαίνει χωρίς να θυσιάζεται η ακρίβεια, δηλαδή τα ίδια αποτελέσματα θα προέκυπταν και στην περίπτωση που θα ελεγχόταν εξαντλητικά κάθε σημείο της ψηφιακής εικόνας. Συνεπώς το συνολικό εγχείρημα πραγματοποιείται σε πραγματικό χρόνο αφού και η δημιουργία

---

<sup>2</sup> Η ψηφιακή εικόνα είναι ένας δισδιάστατος πίνακας, όπου σε κάθε κελί είναι αποθηκευμένη η τιμή του χρώματος.

της ψηφιακής εικόνας από ISAR ραντάρ γίνεται σε πραγματικό χρόνο (Mingjing, 2007).

## 6. Εφαρμογή

Για την αξιολόγηση της απόδοσης του προτεινόμενου αλγορίθμου επεξεργάζονται ένα σύνολο από ISAR εικόνες που περιέχουν πραγματικά δεδομένα. Τα υπολογιστικά πειράματα πραγματοποιήθηκαν σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με βασική μονάδα επεξεργασίας Intel Pentium Dual Core 1,63GHz και μνήμη 512MB. Ο αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Borland Delphi με λειτουργικό σύστημα Windows Vista Ultimate Edition SP1.

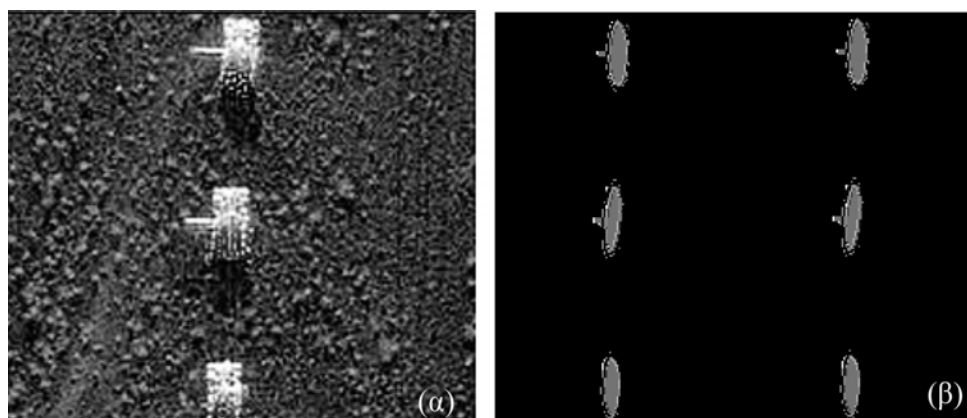
Έτσι λοιπόν, η Εικόνα 4α περιέχει το αποτέλεσμα της επεξεργασίας μετά την πρώτη φάση του αλγορίθμου της Εικόνας 1. Πρόκειται για μια ψηφιακή εικόνα με βάθος χρώματος 1 bit, δηλαδή περιέχει μόνο μαύρο και άσπρο χρώμα (χωρίς αποχρώσεις του γκρι) με απουσία θορύβου. Διαπιστώνουμε πως ο αλγόριθμος έχει εντοπίσει το στόχο (κανονιοφόρο USS Crocket) υπολογίζοντας ταυτόχρονα και το μέγεθος του αλλά και το σημείο μέγιστου πλήγματος (Εικόνα 4β).

Ομοίως στην Εικόνα 5α (Cheney, 2005), είναι ορατά τρία άρματα μάχης τύπου M-47, όπου ο αλγόριθμος τα έχει διαχωρίσει από το φόντο όπως φαίνεται στη δυαδική εικόνα (Εικόνα 5β) σύμφωνα με την πρώτη φάση. Στη συνέχεια έχουν υπολογιστεί η εγγεγραμμένη έλλειψη και η έλλειψη προσέγγισης για κάθε στόχο.

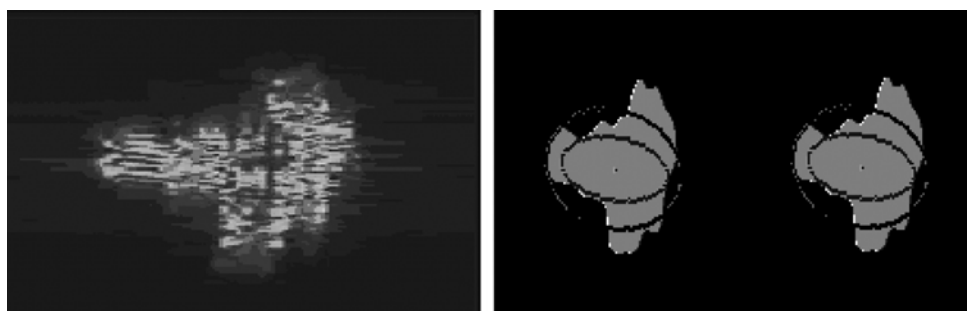
Επίσης, στην Εικόνα 6α (Thayaragan, 2006), περιέχεται το αποτύπωμα αεροσκάφους τύπου MiG-25, στο οποίο παρατηρείται έντονη ανωμαλία στο περίγραμμα λόγω της ταχύτητας του. Έτσι, ο αλγόριθμος μετά την πρώτη φάση υπολόγισε την Εικόνα 6β παραμένοντας το περίγραμμα του στόχου ακανόνιστο σε υψηλό βαθμό. Οπότε, προέκυψαν οι αντίστοιχες ελλείψεις με το ακριβές σημείο μέγιστου πλήγματος.



**Εικόνα 4.** Μετά την πρώτη φάση του αλγορίθμου προκύπτει η δυαδική εικόνα (Εικόνα 4α) και μετά το πέρας του εντοπίζονται επιτυχώς η εγγεγραμμένη και η περιγεγραμμένη έλλειψη καθώς και το σημείο μέγιστου πλήγματος (Εικόνα 4β).



**Εικόνα 5.** Στα αριστερά η προκύπτουσα εικόνα (Cheney, 2005) μετά τη ψηφιακή επεξεργασία των ληφθέντων σημάτων από ISAR ραντάρ. Στα δεξιά τα τρία άρματα μάχης M-47 έχουν εντοπιστεί επιτυχώς από τον προτεινόμενο αλγόριθμο μετά το πέρας όλων των φάσεων του.



**Εικόνα 6.** Στα αριστερά αποτύπωμα αεροσκάφους MiG-25 από ISAR ραντάρ (Thayakaran, 2006) και στα δεξιά η επεξεργασία του στόχου από τον αλγόριθμο.

## 7. Συμπεράσματα - Περαιτέρω έρευνα

Σε αυτό το κεφάλαιο επισημαίνονται τα σημεία βελτίωσης του προτεινόμενου αλγορίθμου και τα συμπεράσματα που απορρέουν από την εφαρμογή του. Έτσι, με την μεθοδολογία που περιγράφηκε αναλυτικά στα ανωτέρω, υπολογίζονται τα εξής σε πραγματικό χρόνο και με μηδενική πιθανότητα λανθασμένου εντοπισμού (zero false alarm):

- i) Εστίαση στις περιοχές ενδιαφέροντος –στόχους– της εικόνας (Regions of Interest).

- ii) Καταμέτρηση και εντοπισμός των στόχων.
- iii) Υπολογισμός έλλειψης (ή κύκλου) ίσου εμβαδού με τον στόχο.
- iv) Μέγιστη δυνατή επικάλυψη της έλλειψης που προσεγγίζει τον κάθε στόχο.
- v) Υπολογισμός του βέλτιστου σημείου πλήξης του στόχου.

Το σημαντικότερο σημείο είναι ο ακριβής υπολογισμός χωρίς να απαιτείται επεξεργασία κάθε εικονοστοιχείου της εικόνας. Εξαιτίας αυτού επιτυγχάνεται η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, το οποίο ανήκει στην κλάση των NP-Hard προβλημάτων.

Εντούτοις, υπάρχουν αξιοσημείωτες αναφορές για μελλοντικές βελτιώσεις του προτεινόμενου αλγορίθμου οι οποίες επεκτείνουν τη χρησιμότητα του:

- Επεξεργασία σε δεδομένα τριών διαστάσεων (3-D) με εφαρμογή ελλειψοειδούς σε ακανόνιστες περιοχές. Τα ISAR ραντάρ έχουν τη δυνατότητα παραγωγής τέτοιων δεδομένων (Ma, 2008).
- Υπολογισμός και πρόβλεψη της πορείας των στόχων.
- Παραλληλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας την τεχνική της πυραμίδας.
- Περαιτέρω βελτιστοποίηση κυρίως στους γεωμετρικούς υπολογισμούς των περιστροφών.
- Διαχωρισμός μεταξύ δύο ή περισσότερων επικαλυπτόμενων ακανόνιστων περιοχών (object splitting problem). Ο αλγόριθμος είναι σε θέση να αναγνωρίζει τις επικαλυπτόμενες περιοχές ενδιαφέροντος ως μία γι'αυτό και υπολογίζει μόνο μία έλλειψη για όλη την περιοχή (αερομαχίες).

## Βιβλιογραφία

1. Borden, B., 2002. *Mathematical problems in radar inverse scattering*, Institute of Physics Publishing, vol. 18.
2. Bresenham Jack, 1977. *A Linear Algorithm for Incremental Display of Circular Arcs*, Communications of the ACM, Volume 20 , Issue 2, pp.100-106.
3. Cakoni, F., and Colton D., 2005. *A Survey in Mathematics for Industry: Open problems in the qualitative approach to inverse electromagnetic scattering theory*, European Journal of Applied Mathematics, Cambridge University Press, vol. 16.
4. Cheney, M., 2005. *Radar Imaging*, Institute for Mathematics and its Applications.
5. Cheney, M., 2001. *A mathematical tutorial on Synthetic Aperture Radar*, SIAM Review 43.
6. Culberson, J. C. and Reckhow, R. A., 1994. *Covering Polygons is Hard*, Journal of Algorithms, 17: 2 – 44.
7. Efrat, A., Hoffmann, F., Knauer, C., Kriegel, K., Rote, G. and Wenk, C., 2003. *Covering with Ellipses*, Algorithmica, vol. 38: 145-160.



8. Fleury, M. and Clark, A.F., 1997. *Sampling concerns in scanline algorithms*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 16: 349 – 361.
9. Gangeskar, R., 2002. *Ocean Current Estimated from X-band Radar Sea Surface Images*, IEEE Transactions and Remote Sensing, vol. 40, no. 4.
10. Gonzalez, C.R., Woods, E. R., 2002. *Digital Image Processing*, Second Edition, Prentice Hall.
11. Hough, P., 1962. *Hough Transform*, IBM.
12. Ji. Q. and Haralick, R.M., 1999. *A Statistically Efficient Method for Ellipse Detection*, IEEE International Conference on Image Processing, Kobe, 2: 730 – 734.
13. Jianfei, M., Xiong R., Ding Weilong, 2006. *A Compound and Robust Algorithm for Ellipse Detection*, IEEE International Conference on Artificial Reality and Telexistence, China
14. Kennedy, J., 2006. *A Fast Bresenham Type Algorithm For Drawing Ellipses*, Mathematics Department, Santa Monica College, [http://homepage.smc.edu/kennedy\\_john/](http://homepage.smc.edu/kennedy_john/).
15. Leung, S., Tak-Sum Wong and H. Horace Ho-Shing Ip, 2006. *Fitting Ellipses to a Region with Application in Calligraphic Stroke Reconstruction*, IEEE International Conference on Image Processing, Atlanta.
16. Levitas, B. and Matuzas J., 2005. *Evaluation of UWB ISAR image resolution*, IEEE International Conference on Radar.
17. Liambas, C. and Tsouros, C., 2008. *An Algorithm for Detecting and Measuring Jagged Elliptical Regions from a Binary Image*, IEEE International Conference on Information & Communication Technologies: From Theory to Applications, Syria, Damascus.
18. Mingjing, L., Meiguo, G. and Fu, Tuo, 2007. *Real time ISAR imaging algorithm of maneuvering targets based on the fractional fourier transform*, IEEE Asian and Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar.
19. Ma, C., Yeo, T.S., Zhang, Q., Tan, H.S. and Wang, J., 2008. *Three-Dimensional ISAR Imaging Based on Antenna Array*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.
20. Malik, H., Naeem, F., Zuberi, Z., and ul Haq R., 2004. *Vision based driving simulation*, IEEE International Conference on Cyberworlds, Singapore.
21. National Aeronautics and Space Administration Goddard IDL program library, 2008 <http://idlastro.gsfc.nasa.gov>.
22. Rong, Li X. and Jilkov, V.P., 2005. *Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.
23. Rousseeuw, J.P., Annick, M.L., 2003. *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley.
24. Sonka, M., Hlavac, V. and Boyle R., 1999. *Image Processing, Analysis and Machine Vision*, 2nd ed., New York PWS Publications.

25. Sullivan, J.R., 2000. *Microwave Radar Imaging and Advanced Concepts*, Artech House.
26. Thayaparan T., Djurovic I. and Stankovic L., 2006. *Focusing distorted ISAR images using Adaptive Local Polynomial Fourier Transform*, IEEE International Radar Symposium.
27. US Naval Research Laboratory, Radar Division, Washington DC 20375, [www.nrl.navy.mil](http://www.nrl.navy.mil), 2003.
28. Weisberg Sanford, 2005. *Applied Linear Regression*, Wiley.
29. Yan Wei, Zhu Zhaoda, Wang Qingdong and Ma Ning, 2001. *Some new techniques used in digital weather radar networking and composition*, IEEE International Conference on Radar.