

# Σύγκριση δύο Μεθοδολογιών Υπολογισμού των Υστερητικών Διαδρομών μέσα σε ένα Αναπαραγωγίμο Βρόχο Υστέρησης

**Α. Πουλοβασίλης, Γ. Κάργας, Π. Κερκίδης**

*Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,*

*Τμήμα Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων & Γεωργ. Μηχανικής*

*Τομέας Διαχείρισης Υδατικών Πόρων, Ιερά Οδός 75, 118 55 Αθήνα*

*hyd4kag@aua.gr, kerkides@aua.gr*

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται συγκριτική αξιολόγηση δύο μεθοδολογιών που στοχεύουν στην πρόβλεψη της υστερητικής σχέσης  $\Theta(H)$  όπου  $\Theta$  η περιεκτικότητα σε νερό και  $H$  το φορτίο πίεσης. Οι μεθοδολογίες αυτές είναι του Muallem (1973) και των Roulovasilis and Kargas (P-K) (2000). Η μεθοδολογία Muallem στηρίζεται στην υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής  $F$  είναι το γινόμενο δύο ανεξάρτητων συναρτήσεων κατανομής, στην υπόθεση της ομοιότητας καθώς και στην εισαγωγή ορισμένων περιορισμών αμφίβολης εγκυρότητας. Επικεντρώνεται στην απ' ευθείας χάραξη των διερευνητικών καμπύλων υστέρησης π.χ. πρώτης τάξης, και δεν προβαίνει στην εκτίμηση των τιμών της  $F$  στο τριγωνικό διάγραμμα του πεδίου ορισμού της. Η μεθοδολογία των P-K αποτελεί στην ουσία μία απλή υπολογιστική διαδικασία που χρησιμοποιεί τις πληροφορίες που παρέχουν οι δύο οριακοί κλάδοι, δεν απαιτεί την εισαγωγή πρόσθετων υποθέσεων και περιορισμών και εξασφαλίζει την εκτίμηση μίας και μοναδικής κατανομής  $\bar{F}$  στο πεδίο ορισμού της (τριγωνικό διάγραμμα κατανομής). Όσον αφορά στην πρόβλεψη των διερευνητικών καμπύλων πρώτης τάξης οι δύο μεθοδολογίες φαίνεται να δίνουν συγκρίσιμα αποτελέσματα. Όμως η μεθοδολογία των P-K δίνει πρόσθετες πληροφορίες όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των πόρων που συνιστούν το πορώδες ενός μέσου ενώ αντίθετα η μεθοδολογία του Muallem δεν μπορεί να δώσει παρόμοιες πληροφορίες τουλάχιστον άμεσα. Τιμές της συνάρτησης  $F$  στην περίπτωση της μεθοδολογίας Muallem μπορούν να εξαχθούν έμμεσα από την ανάλυση των υπολογισμένων διερευνητικών καμπύλων διαβροχής πρώτης τάξης αλλά και των διερευνητικών καμπύλων αποστράγγισης καθώς και με τη χρησιμοποίηση του αρχικού ορισμού της  $F$  ως γινόμενο δύο ανεξαρτήτων συναρτήσεων κατανομής. Η ανάλυση Muallem δεν περιέχει καμία συνθήκη (ικανή και αναγκαία) που να εξασφαλίζει την ταύτιση των τριών αυτών κατανομών. Οι δύο μεθοδολογίες μπορεί να λάβουν την ίδια γενική μορφή χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι τιμές των συναρτήσεων κατανομής είναι ταυτόσημες.

# Comparative Evaluation of two Methodologies for the Estimation of Hysteretic Scanning Curves

A. Poulouvasilis, G. Kargas, P. Kerkides

*Agricultural University of Athens*

*Dep. of Natural Resources Development & Agricultural Engineering*

*Lab. of Agricultural Hydraulics. Iera odos 75, 11855 Athens*

*lhyd4kag@aua.gr, kerkides@aua.gr*

## Abstract

In this work a comparative evaluation between two methodologies, which predict the hysteretic  $\Theta(H)$  relationship, where  $\Theta$  denotes the volumetric water content and  $H$  the soil water matric potential, is attempted. The two methodologies are those of Mualem (1973) and Poulouvasilis and Kargas (P-K), (2000). Mualem's methodology is based on the hypothesis that the bivariate distribution function  $F$  can be given as a product of two independent univariate distribution functions, on the similarity hypothesis and also resorts to some restrictions of ambiguous validity. Its promoted result is the prediction of hysteretic scanning curves (e.g first order), which comes out without need of estimating first, the values of  $F$  in its triangular domain of definition. P-K's methodology is, in essence, a simple calculating procedure which relies on the information supplied by two main branches of the moisture retention curve, does not have to introduce any arbitrary or ambiguous restrictions or assumptions and results on estimating a unique distribution function  $F$  on its triangular domain of definition. The predicted hysteretic scanning curves of first order, obtained by two methodologies, above, seem to be quite comparable. Yet, P-K's methodology gives extra information regarding the pores characteristics of the porous medium under study, whereas Mualem's cannot provide such information, at least, in a direct fashion. Values of  $F$ , for the Mualem's methodology can be derived indirectly by analyzing the predicted hysteretic scanning curves, either, those of wetting or drying, or through its definition as a product of two univariate independent distribution functions. Mualem's analysis does not safeguard the uniqueness of the distribution function  $F$ , that is, the estimated values of  $F$  according to the three procedures described above do not coincide. Mualem's and P-K's methodologies may end-up in a similar form, but this does not, by any chance, mean that these two methodologies are the same.

## 1. Εισαγωγή

Η αναγνώριση της σπουδαιότητας του φαινομένου της υστέρησης στην ανάπτυξη των κατατομών της εδαφικής υγρασίας και γενικότερα στην κίνηση του εδαφικού νερού οδήγησαν στην ανάπτυξη συστηματικής ερευνητικής προσπάθειας για τη μελέτη του

φαινομένου. Στα πλαίσια της προσπάθειας αυτής εντάσσεται και η ανάλυση του φαινομένου με την εισαγωγή της θεωρίας των ανεξάρτητων στοιχείων στο σύστημα πορώδες μέσο-νερό (Poulovassilis, 1962). Η θεωρία αυτή αποδείχθη αρκετά ικανοποιητική στην περιγραφή της υστερητικής σχέσης μεταξύ της περιεκτικότητας σε νερό ( $\Theta$ ) και του φορτίου πίεσης ( $H$ ) στα πορώδη μέσα στα οποία η κατανομή των πόρων η οποία περιγράφεται από την οριακή καμπύλη στράγγισης καθώς και η αντίστοιχη που περιγράφεται από την οριακή καμπύλη διαβροχής είναι του αυτού περίπου εύρους (Poulovassilis, 1962, 1970, Talsma, 1970). Αργότερα οι Torp and Miller (1966) παρουσίασαν αναπαραγωγίμους βρόχους υστέρησης στους οποίους η θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων δεν μπορούσε να εφαρμοσθεί. Η κατηγορία αυτών των πορώδων μέσων χαρακτηρίζεται από μικρό εύρος κατανομής των πόρων κατά την στράγγιση σε σχέση με αυτή του οριακού κλάδου διαβροχής. Για τα μέσα αυτά οι Poulovassilis and Childs (1971) ανέπτυξαν τη θεωρία των εξαρτημένων στοιχείων εισάγοντας την υπόθεση ότι στην κατηγορία αυτών των πορώδων μέσων, η είσοδος ή η απομάκρυνση των στοιχείων εξαρτάται και από την τιμή του  $H$  κατά την αντιστροφή από την στράγγιση σε διαβροχή ή αντιστροφή.

Σύμφωνα με τη θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων οι τιμές της συνάρτησης κατανομής  $F$  πάνω στην επιφάνεια  $OAB$  (σχήμα 1) του διαγράμματος κατανομής μπορούν να προσδιορισθούν με ανάλυση μίας οικογένειας πειραματικών διερευνητικών καμπύλων πρώτης τάξης (διαβροχής ή στράγγισης) μέσα σ' ένα αναπαραγωγίμο βρόχο υστέρησης. Ο πειραματικός προσδιορισμός των υστερητικών αυτών διαδρομών είναι επίπονος και χρονοβόρος και στο γεγονός αυτό οφείλονται οι προσπάθειες υπολογισμού της  $F$  από τα πειραματικά δεδομένα των οριακών καμπύλων ενός αναπαραγωγίμου βρόχου υστέρησης. Ο J. Philip (1964) ήταν ο πρώτος που παρουσίασε ένα υπολογιστικό σχήμα στο οποίο οι υστερητικές διαδρομές υπολογίζονται από πληροφορίες που δίνουν οι οριακοί κλάδοι.

Το σχήμα αυτό είναι τυπικά ισοδύναμο με τη θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων και ο υπολογισμός της  $F$  στηρίζεται στην αρχή της ομοιότητας. Στην συνέχεια, αρκετοί ερευνητές παρουσίασαν υπολογιστικά σχήματα στα οποία γίνεται προσπάθεια απλούστευσης των αλγορίθμων πρόβλεψης των διερευνητικών καμπύλων (Mualem, 1973, 1974, Mualem and Dagan, 1975, Mualem, 1977, Mualem and Miller, 1979, Mualem, 1984, Parlange, 1976, κ.α.).

Σχετικά πρόσφατα οι Poulovassilis and Kargas (2000) παρουσίασαν μία νέα μεθοδολογία κατά την οποία η κατανομή της  $F$  υπολογίζεται από τα δεδομένα των δύο οριακών κλάδων. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται συνοπτικά οι μεθοδολογίες (Poulovassilis and Kargas, 2000) και Mualem (1973) και επιχειρείται η σύγκρισή τους. Επιλέχθηκε το Model I από τα διάφορα πρότυπα που έχουν προταθεί από τον Mualem διότι ορίζει τη συνάρτηση κατανομής των στοιχείων πάνω σε τριγωνικό

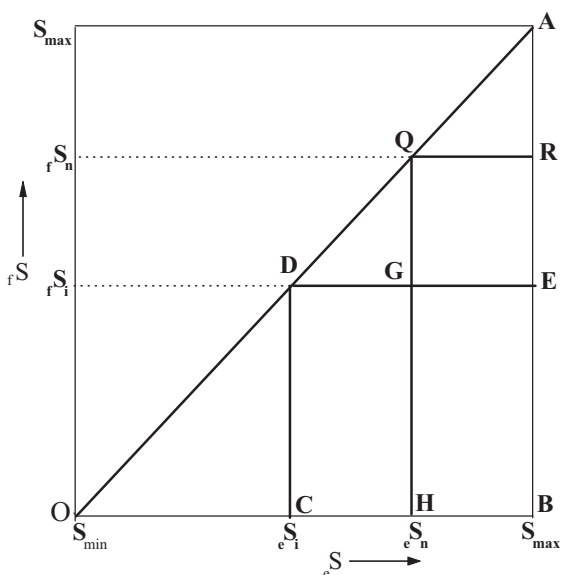
διάγραμμα όπως και αυτό των P-K (2000) αλλά και γιατί όλα τα επόμενα μοντέλα του Mualem στηρίζονται στην ίδια βασική υπόθεση (αρχή ομοιότητας) για τον υπολογισμό της  $f$ . Σε όλα τα επόμενα μοντέλα του Mualem η  $f$  ορίζεται σε τετραγωνικό διάγραμμα κατανομής κυρίως για λόγους απλούστευσης των υπολογισμών (Mualem 1974, Kargas and Kerkides, 2005).

## 2. Θεωρία

### 2.1. Μέθοδος P-K (2000)

Εισάγεται μία καινούργια συνάρτηση κατανομής  $\bar{F}$  η οποία διατηρεί τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης κατανομής  $F$  του προτύπου των ανεξάρτητων στοιχείων (Poulovassilis, 1962). Έτσι, η κλίση της οριακής καμπύλης διαβροχής σε μία ορισμένη τιμή της μύζησης  $S_i = -H_i$  όπου  $H$  είναι το φορτίο πίεσης του εδαφικού νερού) δίνεται από την εξίσωση (σχήματα 1 και 2)

$$f \Theta'_i = - \int_{eS_i}^{S_{\max}} \bar{F}(fS_i, eS) d_eS = - \int_{eS_i}^{eS_n} \bar{F}(fS_i, eS) d_eS - \int_{eS_n}^{S_{\max}} \bar{F}(fS_i, eS) d_eS \quad (2.1)$$

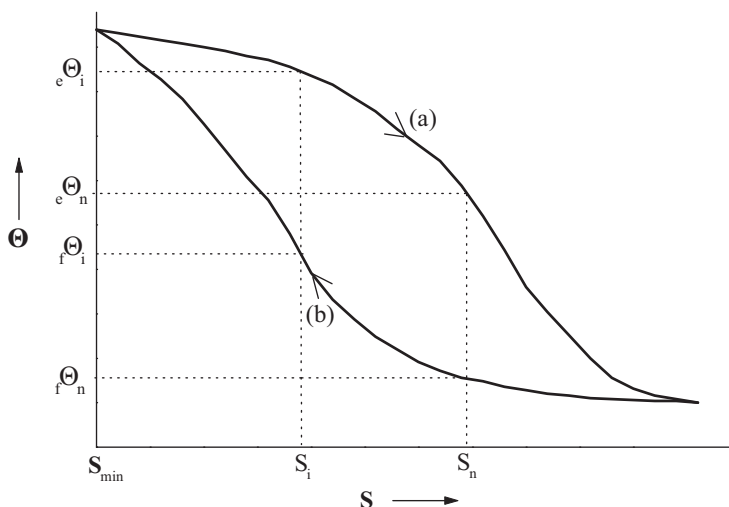


Σχήμα1. Διάγραμμα κατανομής των στοιχείων κατά την διαδικασία της στράγγισης και της διαβροχής

Η κλίση της οριακής καμπύλης στράγγισης σε μία τιμή μύζησης  $S_n$  δίνεται από την

$$e\Theta'_n = - \int_{S_{\min}}^{fS_n} \bar{F}(eS_n, fS) d_f S = - \int_{S_{\min}}^{fS_i} \bar{F}(eS_n, fS) d_f S - \int_{fS_i}^{fS_n} \bar{F}(eS_n, fS) d_f S \quad (2.2)$$

όπως στην περίπτωση της θεωρίας των ανεξάρτητων στοιχείων με τη συνάρτηση κατανομής  $\bar{F}$  να αντικαθιστά την  $F$ .



**Σχήμα 2.** Οριακή καμπύλη στράγγισης (a) και οριακή καμπύλη διαβροχής (b) ενός υποθετικού αναπαραγωγικού βρόχου υστέρησης.

Οι δείκτες  $e$  και  $f$  στις παραπάνω εξισώσεις υποδηλώνουν τις μεταβλητές κατά την διαδικασία της στράγγισης και διαβροχής αντίστοιχα. Επιπλέον ο συμβολισμός  $f\Theta'_i$  αναφέρεται στην κλίση της οριακής καμπύλης διαβροχής στη μύζηση  $S_i$  στην οποία αντιστοιχεί περιεκτικότητα σε υγρασία  $f\Theta_i$  ενώ ο συμβολισμός  $e\Theta'_i$  αναφέρεται στην κλίση της οριακής καμπύλης στράγγισης στην ίδια μύζηση  $S_i$  στην οποία τώρα αντιστοιχεί περιεκτικότητα σε υγρασία  $e\Theta_i$ . Η περιεκτικότητα σε υγρασία  $e\Theta_i$  είναι πάντα μεγαλύτερη από την  $f\Theta_i$  εκτός από τα δύο σημεία σύγκλισης των οριακών καμπύλων στα σημεία  $(S_{\max}, \Theta_{\min})$  και  $(S_{\min}, \Theta_{\max})$  όπου οι δύο περιεκτικότητες σε υγρασία είναι ίσες (Σχήμα 2).

Οι τιμές της  $\bar{F}$ , υπολογίζονται με διαμερισμό των κλίσεων της οριακής καμπύλης διαβροχής ενός αναπαραγωγίμου βρόχου υστέρησης αναλογικά με τις κλίσεις της οριακής καμπύλης στράγγισης ή αντίστροφα διαμοιράζοντας τις κλίσεις της οριακής καμπύλης στράγγισης αναλογικά με τις κλίσεις της οριακής καμπύλης διαβροχής. Πιο συγκεκριμένα οι τιμές της  $\bar{F}$  μπορούν να υπολογισθούν με την κατάτμηση της κλίσης  ${}_f\Theta'_i$  αναλογικά με το τμήμα εκείνο της  ${}_e\Theta'_n$  που δίνει το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της (2.2) ή αντίστροφως με την κατάτμηση της  ${}_e\Theta'_n$  αναλογικά με το τμήμα εκείνο της  ${}_f\Theta'_i$  που δίνεται από το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της (2.1). Τα στοιχεία του νερού τα οποία εισέρχονται στο πορώδες μέσο όταν η μύζηση μειώνεται από την τιμή  ${}_fS_i + \delta S$  στην τιμή  ${}_fS_i$  ακολουθώντας την οριακή καμπύλη διαβροχής, οφείλουν να απομακρύνονται από το πορώδες μέσο στο διάστημα μύζησης από  ${}_eS_i$  έως  $S_{max}$  όταν αντιστρέψουμε την διαδικασία διαβροχής στην τιμή μύζησης  ${}_fS_i$  και πραγματοποιήσουμε στράγγιση. Συνεπώς συμβάλλουν στην κλίση της οριακής καμπύλης στράγγισης στο διάστημα μύζησης από  ${}_eS_i$  μέχρι  $S_{max}$ . Τα στοιχεία τα οποία εισέρχονται στο πορώδες μέσο όταν η μύζηση μειώνεται από  ${}_fS_i$  μέχρι  $S_{min}$  και απομακρύνονται από το πορώδες μέσο στο διάστημα μύζησης από  ${}_eS_i$  μέχρι  $S_{max}$  συμβάλλουν επίσης στην κλίση της οριακής καμπύλης στράγγισης στο παραπάνω διάστημα μύζησης. Το άθροισμα αυτών των στοιχείων είναι

$$\int_{{}_eS_i}^{S_{max}} \int_{S_{min}}^{{}_fS_i} \bar{F}({}_fS, {}_eS) d{}_fS d{}_eS = {}_e\Theta_i - {}_f\Theta_i \quad (2.3)$$

Η συμβολή των στοιχείων με τιμή  ${}_fS = {}_fS_i$  (τα οποία συνιστούν την κλίση της οριακής καμπύλης διαβροχής,  ${}_f\Theta'_i$ ) πάνω στην κλίση της οριακής καμπύλης στράγγισης  ${}_e\Theta'_n$  σε σχέση με την συμβολή του συνόλου των στοιχείων που αναφέρονται στην (2.3) θα είναι

$$\frac{\int_{{}_fS_i}^{S_{max}} \bar{F} d{}_eS}{\int_{{}_eS_i}^{S_{max}} \int_{S_{min}}^{{}_fS_i} \bar{F}({}_fS, {}_eS) d{}_fS d{}_eS} = \frac{{}_f\Theta'_i}{{}_e\Theta_i - {}_f\Theta_i} \quad (2.4)$$

και συνεπώς η τιμή της συνάρτησης κατανομής  $\bar{F}$  στο σημείο  $G({}_fS_i, {}_eS_n)$  θα δίνεται από την

$$\bar{F}_{i,n} = \frac{f \Theta'_i}{e \Theta_i - f \Theta_i} \left[ e \Theta'_n - \int_{f S_n}^{f S_i} \bar{F}(e S_n, f S) d_f S \right] \quad (2.5)$$

σύμφωνα με την αρχική υπόθεση της αναλογικής κατάτμησης.

Δηλαδή η  $\bar{F}_{i,n}$  είναι το γινόμενο δύο αλληλοσυνδεόμενων μεταβλητών οι οποίες πρέπει να υπολογίζονται διαδοχικά. Είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός της τιμής της  $\bar{F}_{i,n}$  στην (2.5) προϋποθέτει τον προσδιορισμό του ολοκληρώματος που υπάρχει σ' αυτή την εξίσωση. Οι υπολογισμοί αυτοί ξεκινούν από το τέλος της στράγγισης ή την αρχή της διαβροχής.

Στην αντίθετη περίπτωση τα στοιχεία τα οποία εξέρχονται από το πορώδες μέσο όταν η μύζηση αυξάνεται από  $e S_i$  σε  $e S_i + \delta S$  οφείλουν να εισέρχονται στο πορώδες μέσο όταν αντιστρέψουμε την διαδικασία της στράγγισης και πραγματοποιήσουμε διαβροχή στο διάστημα από  $e S_i + \delta S$  σε  $S_{\min}$ . Ακολουθώντας την ανάλογη διαδικασία όπως παραπάνω η τιμή της  $\bar{F}_{i,n}$  στο σημείο  $G(f S_i, e S_n)$  θα δίνεται από την

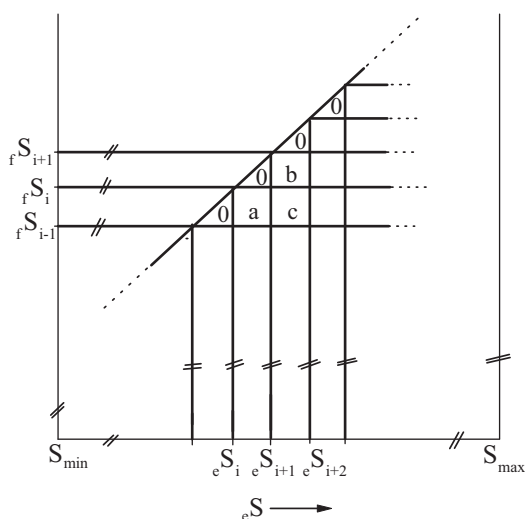
$$\bar{F}_{i,n} = \frac{e \Theta'_n}{e \Theta_n - f \Theta_n} \left[ f \Theta'_i - \int_{e S_n}^{e S_i} \bar{F}(f S_i, e S) d_e S \right] \quad (2.6)$$

Είναι φανερό ότι η απόκτηση της τιμής της  $\bar{F}_{i,n}$  στην (2.6) προϋποθέτει τον προσδιορισμό του ολοκληρώματος που υπάρχει σ' αυτή την εξίσωση. Οι υπολογισμοί αυτοί ξεκινούν από το τέλος της διαβροχής ή την αρχή της στράγγισης. Οι δύο τιμές της  $\bar{F}_{i,n}$  είναι ίσες αφού το δεξιό μέρος των εξισώσεων (2.5) και (2.6) ισούται με την ποσότητα

$$\frac{\left[ e \Theta'_n - \int_{f S_n}^{f S_i} \bar{F}(e S_n, f S) d_f S \right] \left[ f \Theta'_i - \int_{e S_n}^{e S_i} \bar{F}(f S_i, e S) d_e S \right]}{\int_{e S_n}^{S_{\max}} \int_{S_{\min}}^{f S_i} \bar{F}(f S, e S) d_f S d_e S} \quad (2.7)$$

όπου ο παρονομαστής αντιπροσωπεύει την ποσότητα του νερού που βρίσκεται μέσα στην περιοχή HGEBH και η οποία είναι κοινή των δύο περιοχών CDEBC και HQRBH. Συνεπώς ο τρόπος υπολογισμού της  $\bar{F}_{i,n}$  στις δύο περιπτώσεις που προα-

ναφέραμε δίνει την ίδια κατανομή η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις των κλίσεων (2.1) και (2.2) για κάθε ζεύγος τιμών  ${}_fS$  και  ${}_eS$ . Κατά τους υπολογισμούς θεωρούμε όπως και ο Philip (1964) ότι η  $\bar{F}$  έχει μηδενικές τιμές κατά μήκος της διχοτόμου OA του διαγράμματος κατανομής. Έτσι λοιπόν για τον υπολογισμό των τιμών της  $\bar{F}$  κάνουμε υποδιαίρεση της περιοχής OAB με ένα κάναβο αρκετά μικρών τετραγώνων και υποθέτουμε ότι η  $\bar{F}$  έχει μηδενική τιμή στα μικρά τρίγωνα κατά μήκος της γραμμής OA. Στο σχήμα 3 δίνεται ένα παράδειγμα υπολογισμού της  $\bar{F}$ .



Σχήμα 3. Παράδειγμα υπολογισμού των τιμών της  $\bar{F}$ .

$$\bar{F}_a = \frac{{}_f\Theta'_{i-1/2}}{{}_e\Theta_i - {}_f\Theta_i} ({}_e\Theta'_{i+1/2}), \quad \bar{F}_b = \frac{{}_f\Theta'_{i+1/2}}{{}_e\Theta_{i+1} - {}_f\Theta_{i+1}} ({}_e\Theta'_{i+3/2}),$$

$$\bar{F}_c = \frac{{}_f\Theta'_{i-1/2}}{{}_e\Theta_i - {}_f\Theta_i} ({}_e\Theta'_{i+3/2} - \bar{F}_b \delta_f S).$$

Το ποσοστό της υγρασίας που αντιστοιχεί σε κάθε τετράγωνο του κάναβου είναι  $\delta V = \bar{F} \delta_e S \delta_f S$ .

## 2.2. Πρότυπο Mualem

Η βασική υπόθεση η οποία γίνεται είναι ότι η συνάρτηση κατανομής  $f(\psi_w, \psi_d)$  ισούται με το γινόμενο δύο ανεξάρτητων συναρτήσεων κατανομής  $h(\psi_w)$  και  $l(\psi_d)$

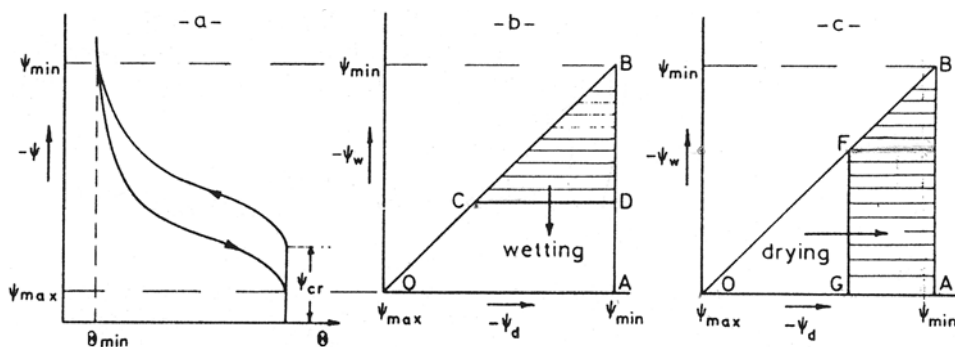


δηλαδή

$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)l(\psi_d) \quad (2.8)$$

όπου  $\psi_w$  το φορτίο πίεσης κατά την διαβροχή και  $\psi_d$  το φορτίο πίεσης κατά την στράγγιση (σχήμα 4).

Δηλαδή στο επίπεδο  $(\psi_w, \psi_d)$  η κατανομή των στοιχείων του νερού που εισέρχονται στο πορώδες μέσο σε ένα φορτίο πίεσης  $\psi_w$  γίνεται σύμφωνα με την συνάρτηση  $l(\psi_d)$  για  $\psi_d < \psi_w$ , ενώ η κατανομή αυτών που στραγγίζουν σε ένα φορτίο πίεσης  $\psi_d$  γίνεται σύμφωνα με την  $h(\psi_w)$ . Η εξίσωση (2.8) εκφράζει επομένως μια “υπόθεση ομοιότητας” αφού η κατανομή σε κάθε οριζόντια γραμμή (διαβροχή) διαφέρει μόνο κατά ένα σταθερό συντελεστή  $h(\psi_w)$ . Ανάλογη είναι η κατάσταση και σε κάθε κατακόρυφη γραμμή (στράγγιση). Έτσι η τιμή της  $f(\psi_w, \psi_d)$  σε κάθε οριζόντια γραμμή θα εξαρτάται από την τιμή της  $l(\psi_d)$  αφού όλα τα στοιχεία του νερού έχουν την ίδια  $h(\psi_w)$ . Επίσης σε κάθε κατακόρυφη γραμμή όλα τα στοιχεία του νερού θα έχουν την ίδια  $l(\psi_d)$  και θα διαφέρουν κατά την  $h(\psi_w)$ . Έτσι λόγω της βασικής υπόθεσης επιβάλλονται εκ των προτέρων στην  $f(\psi_w, \psi_d)$  χαρακτηριστικά τα οποία ενδεχομένως να μην ισχύουν σε όλες τις κατηγορίες πορωδών μέσων. Επιπλέον, σε καμία περίπτωση και σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της  $f(\psi_w, \psi_d)$  ούτε και στην διαγώνιο δεν επιτρέπεται μηδενική τιμή είτε της  $h(\psi_w)$  είτε της  $l(\psi_d)$  μια και αυτό θα οδηγούσε σε μηδενισμό της  $f(\psi_w, \psi_d)$  σε κάθε σημείο του αντίστοιχου φορτίου πίεσης.



Σχήμα 4. (α) Αναπαράσταση του φαινομένου της υστέρησης (β) Διαδικασία της διαβροχής (γ) Διαδικασία της στράγγισης (Muallem, 1973)

Η οριακή καμπύλη διαβροχής αποκτάται ολοκληρώνοντας πάνω στους γεμάτους πόρους (τρίγωνο BCD σχήμα 4b)

$$\theta_w(\psi) = \int_{\psi_{\min}}^{\psi} h(\psi_w) \left[ \int_{\psi_{\min}}^{\psi} l(\psi_d) d\psi_d \right] d\psi_w \quad (2.9)$$

Η περιεκτικότητα σε υγρασία  $\theta$  ισούται  $\theta = \Theta - \Theta_{\min}$  όπου  $\Theta$  είναι η πραγματική περιεκτικότητα σε υγρασία που αντιστοιχεί σ' ένα φορτίο πίεσης  $\psi$  και  $\Theta_{\min}$  είναι αντίστοιχα η περιεκτικότητα σε υγρασία που αντιστοιχεί στην εφαρμογή του ελάχιστου φορτίου πίεσης. Ορίζονται οι συναρτήσεις  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$  που βασίζονται στις συναρτήσεις  $h(\psi)$  και  $l(\psi)$  ως εξής:

$$H(\psi) = \int_{\psi_{\min}}^{\psi} h(\psi_w) d\psi_w \quad (2.10)$$

και

$$L(\psi) = \int_{\psi_{\min}}^{\psi} l(\psi_d) d\psi_d \quad (2.11)$$

Τότε η (2.9) γίνεται

$$\theta_w(\psi) = \int_{\psi_{\min}}^{\psi} h(\psi_w) L(\psi_w) d\psi_w \quad (2.12)$$

και

$$d\theta_w = h(\psi_w) L(\psi_w) d\psi \quad (2.13)$$

Με τον ίδιο τρόπο αποκτάται η οριακή καμπύλη στράγγισης (τραπέζιο ABFG, σχήμα 4c)

$$\theta(\psi_d) = \theta(\psi_w) + \int_{\psi}^{\psi_{\max}} h(\psi_w) d\psi_w \int_{\psi_{\min}}^{\psi} l(\psi_d) d\psi_d \quad (2.14)$$

Από τις (2.10), (2.11) και (2.14) παίρνουμε, σύμφωνα με τον Mualem (1973)

$$\theta(\psi_d) = \theta(\psi_w) + [H(\psi_{\max}) - H(\psi)] L(\psi) \quad (2.15)$$

και

$$d\theta(\psi_d) = [H(\psi_{\max}) - H(\psi)]I(\psi)d\psi \quad (2.16)$$

Τελικά η συνάρτηση  $H(\psi)$ , μετά από διάφορους μετασχηματισμούς και θεωρώντας  $H(\psi_{\min}) = 0$  και  $H(\psi_{\max}) = 1$  παίρνει την μορφή

$$H(\psi) = 1 - e^{-F(\psi)} \quad (2.17)$$

όπου

$$F(\psi) = \int_{\psi_{\min}}^{\psi} \frac{d\theta_w(\psi)}{\theta_d(\psi) - \theta_w(\psi)} \quad (2.18)$$

Μόλις υπολογισθεί η  $H(\psi)$  η συνάρτηση  $L(\psi)$  υπολογίζεται από την (2.15). Οι εξισώσεις των διερευνητικών καμπύλων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$ .

Ο Mualem (1973) ορίζει μια διαδρομή στην περιοχή της υστέρησης με την ίδια μορφή που πρότεινε ο Enderby (1955) και υιοθέτησε ο Everett (1955) δηλαδή  $\theta(\psi) = \theta(\psi_0, \psi_1, \psi_2)$  που σημαίνει ότι από το φορτίο πίεσης  $\psi_0$  μέχρι το  $\psi_1$  πραγματοποιείται διαβροχή, από το  $\psi_1$  μέχρι  $\psi_2$  στράγγιση κ.ο.κ. Τελικά ολοκληρώνοντας πάνω στις κατάλληλες περιοχές, όπως στην περίπτωση των οριακών καμπύλων, προκύπτουν οι εξισώσεις των διερευνητικών καμπύλων. Πιο συγκεκριμένα η διερευνητική καμπύλη στράγγισης πρώτης τάξης δίνεται από την εξίσωση

$$\theta(\psi_{\min}, \psi_1, \psi) = \theta_w(\psi) + [H(\psi_1) - H(\psi)]L(\psi) \quad (2.19)$$

ενώ η αντίστοιχη διαβροχής από την

$$\theta(\psi_{\max}, \psi_1, \psi) = \theta_w(\psi) + [1 - H(\psi)]L(\psi_1) \quad (2.20)$$

Από την μεθοδολογία του Mualem μπορούν να προκύψουν τρία διαγράμματα κατανομής της  $f(\psi_w, \psi_d)$ .

α) Το διάγραμμα κατανομής που προκύπτει από τον ορισμό της

$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)I(\psi_d) = \frac{dH(\psi_w)}{d\psi} \frac{dL(\psi_d)}{d\psi} \quad (2.21)$$

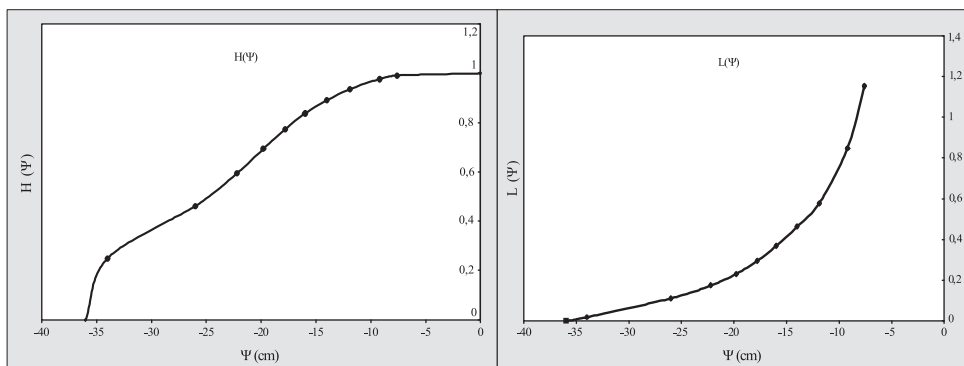
β) εκείνο που προκύπτει από την ανάλυση των διερευνητικών καμπύλων διαβροχής με βάση την (2.20).

γ) εκείνο που προκύπτει από την ανάλυση των διερευνητικών καμπύλων στράγγισης με βάση την (2.19).

Τα διαγράμματα αυτά οφείλουν σύμφωνα με την θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων να ταυτίζονται διότι κάθε στοιχείο νερού δεν μπορεί να εισέρχεται και να εξέρχεται στο πορώδες μέσο σε διαφορετικές τιμές πίεσης.

### 3. Σύγκριση των προτύπων και συζήτηση

Για την αξιολόγηση των δύο μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα για το πορώδες μέσο sand που παρουσίασε ο Poulouvassilis (1970) τα οποία άλλωστε χρησιμοποίησε και ο Mualem (1973). Για την εφαρμογή του μοντέλου των P-K χωρίστηκε το εύρος πίεσης από 0 έως 36 cm σε διαστήματα 1 cm και υπολογίστηκε με την προτεινόμενη μεθοδολογία η τιμή της συνάρτησης κατανομής και χαράχτηκαν οι διερευνητικές καμπύλες (Poulouvassilis, 1962, Kargas et. al., 2007). Στην περίπτωση του Mualem I αρχικά υπολογίστηκε η (2.18) και στην συνέχεια οι δύο ολοκληρωτικές συναρτήσεις  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$  από τις εξισώσεις (2.17) και (2.15) (σχήμα 5). Μετά τον υπολογισμό των δύο αυτών συναρτήσεων έγινε ο υπολογισμός των διερευνητικών καμπύλων από τις εξισώσεις (2.19) και (2.20). Στην συνέχεια από την ανάλυση των διερευνητικών καμπύλων υπολογίστηκαν τα αντίστοιχα δύο διαγράμματα κατανομής.



Σχήμα 5: Οι συναρτήσεις  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$  για το συγκεκριμένο πορώδες μέσο.

Επίσης έγινε υπολογισμός της  $f(\psi_w, \psi_d)$  άμεσα από τα διαγράμματα των  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$  με βάση τον ορισμό της

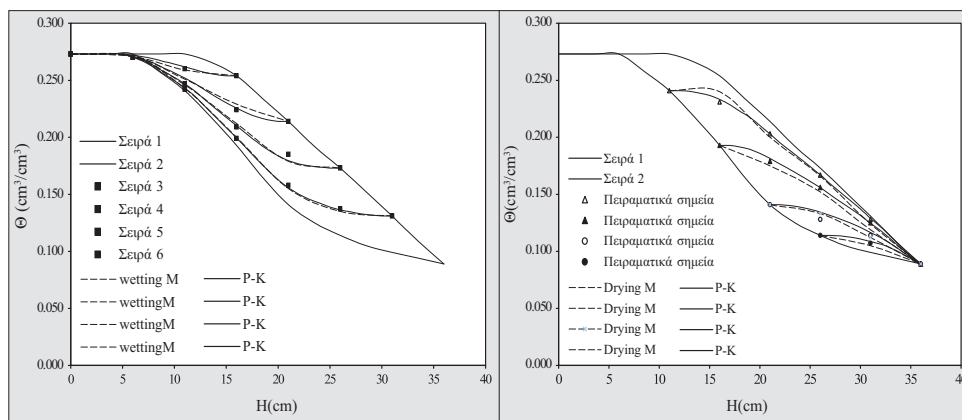
$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)l(\psi_d) = \frac{dH(\psi_w)}{d\psi_w} \frac{dL(\psi_d)}{d\psi_d}$$

και αποκτήθηκε το τρίτο διάγραμμα κατανομής. Έτσι έχουμε άμεσα την δυνατότητα να συγκρίνουμε τα τρία διαγράμματα κατανομής της  $f(\psi_w, \psi_d)$  (Πίνακας 1).

**Πίνακας 1.** Οι τιμές της συνάρτησης κατανομής όπως προκύπτουν από την (2.21), (2.19) και (2.20) σε κάθε διάστημα πίεσης. Η πρώτη κατακόρυφος αντιστοιχεί στην (2.21), η δεύτερη στην (2.20) και η τρίτη στην (2.19). Ο οριζόντιος άξονας αναφέρεται στις τιμές  $\psi_d$  και ο κατακόρυφος στις τιμές  $\psi_w$ .

36	0	0																
31																9	10	10
26												6	4	9	9	11	6	
21									7	6	8	11	14	12	8	7	7	
16							14	15	18	14	18	15	11	12	12	8	7	7
11			18	5	1	22	17	22	11	12	11	8	9	9	7	8	5	
6		0	14	12	18	9	8	0	5	5	7	3	5	0	3	2	7	
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
cm	6	11	16	21	26	31	36											

Στο σχήμα 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου του Mualem I για τις διερευνητικές καμπύλες όπως προκύπτουν από τις προτεινόμενες εξισώσεις (2.19) και (2.20) καθώς και τα αποτελέσματα του μοντέλου των P-K.



**Σχήμα 6:** Σύγκριση μεταξύ πειραματικών δεδομένων (σημεία) και προβλέψεων του μοντέλου των P-K (συνεχείς γραμμές) καθώς και προβλέψεων του μοντέλου Mualem I όπως προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.19) και (2.20) (διακεκομμένες γραμμές).

Όπως προκύπτει από το σχήμα 6 οι δύο μεθοδολογίες δίνουν παραπλήσιες καμπύλες οι οποίες συμφωνούν ικανοποιητικά με τα πειραματικά δεδομένα. Από τον πίνακα 1 φαίνεται ότι οι τιμές της  $f(\psi_w, \psi_d)$  στα τρία διαγράμματα κατανομής δεν ταυτίζονται και εμφανίζουν διαφορές με μεγαλύτερες αποκλίσεις τιμών της  $f(\psi_w, \psi_d)$  κοντά στη διαγώνιο και όσο πλησιάζουμε προς την τιμή κορεσμού όταν πραγματοποιείται διαβροχή. Οι τιμές της  $f(\psi_w, \psi_d)$  που προκύπτουν από την (2.21) δηλαδή το γινόμενο  $h(\psi_w)l(\psi_d)$  στην περιοχή που αναφέραμε είναι σαφώς μεγαλύτερες. Ο τρόπος που ορίζονται οι διερευνητικές καμπύλες από τις εξισώσεις (2.19) και (2.20) «αποκρύπτει» αυτές τις τιμές με αποτέλεσμα να μην εμφανίζονται πουθενά στον υπολογισμό των διερευνητικών καμπύλων. Για τον υπολογισμό των διερευνητικών καμπύλων το πρότυπο του Mualem I ολοκληρώνει κάθε φορά πάνω στις κατάλληλες περιοχές στο διάγραμμα κατανομής αξιοποιώντας τις ολοκληρωτικές συναρτήσεις  $H(\psi)$  και  $L(\psi)$  και την μετρημένη τιμή της οριακής καμπύλης διαβροχής στο αντίστοιχο φορτίο πίεσης και υπολογίζεται π.χ η τιμή της  $\Theta$  της διερευνητικής καμπύλης διαβροχής στο αντίστοιχο  $\psi$ . Έτσι το πρότυπο του Mualem για το υπολογισμό των διερευνητικών καμπύλων δεν χρησιμοποιεί ουσιαστικά το διάγραμμα κατανομής της  $f(\psi_w, \psi_d)$ . Όμως η τιμή της  $\Theta$  εφόσον το μοντέλο βασίζεται στην θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων οφείλει να είναι ίδια όταν ακολουθήσουμε διαφορετική διαδρομή και φτάσουμε στο ίδιο φορτίο πίεσης. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι επιδιώκουμε να υπολογίσουμε την τιμή  $\Theta(\psi)$  κατά την διαβροχή η οποία ξεκινά από ένα φορτίο πίεσης  $\psi_1$  πάνω στην οριακή καμπύλη στράγγισης. Τότε η τιμή της  $\Theta(\psi)$  όπως ορίζεται από την (2.20) οφείλει να είναι ίση με την

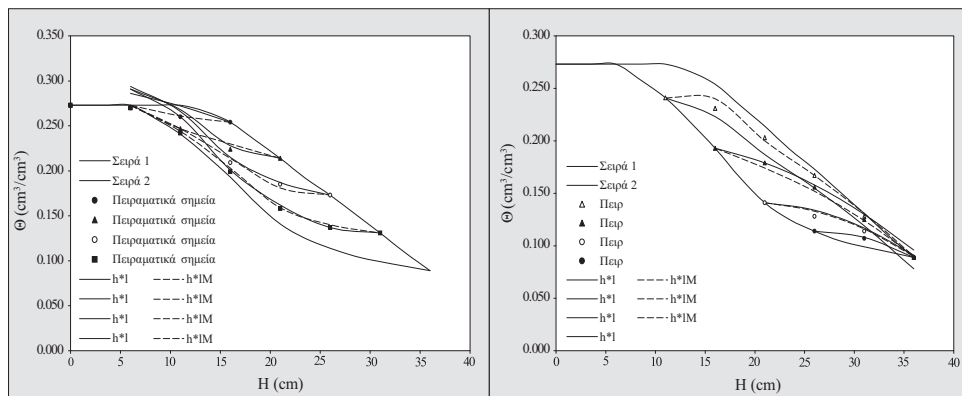
$$\theta\left(\begin{matrix} \psi_{\max} \\ \psi_1 \end{matrix} \psi\right) = \theta(\psi_w) + [1 - H(\psi)]L(\psi_1) = \theta(\psi_{d1}) + \int_{\psi_1}^{\psi} \int_{\psi_1}^{\psi} f(\psi_w, \psi_d) d\psi_w d\psi_d \quad (2.22)$$

ή η τιμή της (2.19) ίση με την

$$\begin{aligned} \theta\left(\begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_{\min} \end{matrix} \psi\right) &= \theta(\psi_w) + [H(\psi_1) - H(\psi)]L(\psi) = \\ &= \theta(\psi_{w1}) - \int_{\psi}^{\psi_1} \int_{\psi}^{\psi_1} f(\psi_w, \psi_d) d\psi_w d\psi_d \end{aligned} \quad (2.23)$$

Στο σχήμα 7 παρουσιάζονται οι διερευνητικές καμπύλες διαβροχής και στράγγισης που προκύπτουν από τους δύο διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού από το διάγραμμα κατανομής των στοιχείων που προκύπτει από την (2.21). Είναι προφανές ότι

ο τρόπος υπολογισμού των (2.22) και (2.23) που βασίζεται στο δεξιό μέρος της εξίσωσης οδηγεί σε μη αποδεκτές διερευνητικές καμπύλες.



**Σχήμα 7:** Σημεία (Πειραματικά σημεία). Υπολογισμός με βάση την λογική του μοντέλου του Mualem I (Διακεκομμένες γραμμές). Υπολογισμός με βάση την διαφορετική διαδρομή (δεύτερο μέρος των εξισώσεων 2.22 και 2.23, συνεχείς γραμμές).

Στην περίπτωση των διερευνητικών καμπύλων διαβροχής βλέπουμε ότι οι διερευνητικές καμπύλες που υπολογίζονται από το δεξιό μέρος της (2.22) οδηγούνται εκτός του βρόχου υστέρησης. Αυτό συμβαίνει διότι στον υπολογισμό λαμβάνονται υπόψη οι μεγάλες τιμές της  $f(\psi_w, \psi_d)$  που παρουσιάζονται κοντά στη διαγώνιο με αποτέλεσμα οι καμπύλες να αποκτούν υπερβολική κλίση ειδικά στις τιμές φορτίου πίεσης που τείνουν στο  $\psi = 0$ . Στην περίπτωση των διερευνητικών καμπύλων στράγγισης η διερευνητική καμπύλη που ξεκινά από το φορτίο πίεσης 11 cm βλέπουμε να τέμνει τις άλλες καμπύλες γεγονός ασυμβίβαστο με την θεωρία των ανεξάρτητων στοιχείων. Αυτό οφείλεται στο ότι λαμβάνονται υπόψη οι μεγάλες τιμές της  $f(\psi_w, \psi_d)$  που προαναφέραμε με αποτέλεσμα να προσδίδουν στη διερευνητική καμπύλη που ξεκινά από την τιμή 11 cm μεγάλες κλίσεις στα αρχικά βήματα πίεσης, ειδικά στο βήμα από 11 cm έως 16 cm.

Οι μεγάλες τιμές της  $f(\psi_w, \psi_d)$  που παρατηρούνται στην συγκεκριμένη περιοχή του διαγράμματος κατανομής οφείλονται στους περιορισμούς που επιβάλλονται από τη βασική υπόθεση του μοντέλου του Mualem I. Από τον πίνακα 1 προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή της  $f(\psi_w, \psi_d)$  θα αποκτάται σε τιμές του φορτίου πίεσης κοντά στα 10 cm όπου η  $l(\psi_d)$  θα έχει την μεγαλύτερη τιμή αφού σε κάθε οριζόντια γραμμή θα έχουμε ίδια  $h(\psi_w)$  π.χ. γραμμή DE στο σχήμα 1. Ομοίως οι τιμές της  $h(\psi_w)$  θα

μειώνονται από πάνω προς τα κάτω στην ίδια κατακόρυφο (π.χ QH στο σχήμα 1) με αποτέλεσμα η τιμή της  $f(\psi_w, \psi_d)$  να ακολουθεί την ίδια λογική. Σε ανάλογα συμπεράσματα μπορεί κάποιος να καταλήξει μελετώντας τα σχήματα 3 και 4 του Muallem (1973). Οι τρεις εξισώσεις (2.5), (2.6) και (2.7) που υπολογίζουν την συνάρτηση κατανομής  $\bar{F}$  στην μεθοδολογία των P-K είναι ισοδύναμες. Οπότε αρκεί να ασχοληθούμε με μία από αυτές για την σύγκρισή της με την συνάρτηση κατανομής  $f$  του Muallem. Εννοιαποιούμε τους δείκτες των δύο προτύπων ( $e=d$  και  $w=f$ ) για να είναι εύκολη η παρακολούθηση των εξισώσεων.

Είναι προφανές ότι η γενική μορφή της (2.5) των P-K σε ένα σημείο  $G(\psi_w, \psi_d)$  (σχήμα 1) είναι γινόμενο δύο αλληλοεξαρτημένων μεταβλητών των  $\psi_w$  και  $\psi_d$

$$\bar{F}(\psi_w, \psi_d) = A(\psi_w)B(\psi_w, \psi_d) \quad (2.24)$$

όπου

$$A(\psi_w) = \frac{f \Theta'_i}{e \Theta_i - f \Theta_i} \quad (2.25)$$

και

$$B(\psi_w, \psi_d) = \left[ e \Theta'_n - \int_{f S_n}^{f S_i} \bar{F}(e S_n, f S) d_f S \right] \quad (2.26)$$

Στην ίδια γενική μορφή μπορεί να καταλήξει και η συνάρτηση κατανομής του Muallem, όπου η  $B(\psi_w, \psi_d)$  με βάση την υπόθεση  $f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)l(\psi_d)$  δίνεται από την

$$B(\psi_w, \psi_d) = l(\psi_d)[1 - H(\psi_w)] \quad (2.27)$$

οπότε

$$\frac{B(\psi_w, \psi_d)}{B(\psi_w, \psi_w)} = \frac{l(\psi_d)[1 - H(\psi_w)]}{l(\psi_w)[1 - H(\psi_w)]} = \frac{l(\psi_d)}{l(\psi_w)} = \frac{l(\psi_d)h(\psi_w)}{l(\psi_w)h(\psi_w)} = \frac{f(\psi_w, \psi_d)}{f(\psi_w, \psi_w)} \quad (2.28)$$

Από την (2.28) παίρνουμε

$$f(\psi_w, \psi_d) = f(\psi_w, \psi_w) \frac{B(\psi_w, \psi_d)}{B(\psi_w, \psi_w)} \quad (2.29)$$

που αποκτά μετά από μετασχηματισμούς την γενική μορφή της (2.24) των P-K. Όμως στην περίπτωση του Muallem η (2.29) καταλήγει τελικά στην βασική υπόθεση του



$$\begin{aligned}
f(\psi_w, \psi_d) &= A(\psi_w)B(\psi_w, \psi_d) = \frac{h(\psi_w)}{[1 - H(\psi_w)]} l(\psi_d) [1 - H(\psi_w)] = \\
&= h(\psi_w) l(\psi_d)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Στην ίδια γενική μορφή  $f(\psi_w, \psi_d) = A(\psi_w)B(\psi_w, \psi_d)$  επίσης καταλήγουμε και αν κάνουμε την διαφορετική υπόθεση

$$f(\psi_w, \psi_d) = l(\psi_d) \tag{2.31}$$

Το γεγονός ότι τα δύο πρότυπα οδηγούν στην ίδια γενική μορφή αυτό δεν σημαίνει ότι οι τιμές της συνάρτησης κατανομής τους είναι ταυτόσημες. Για να γίνει άμεση σύγκριση των δύο προτύπων πρέπει να γίνει εκτίμηση των τιμών της συνάρτησης κατανομής που δίνει το κάθε ένα από αυτά. Ξεκινώντας από την βασική υπόθεση του Muallem  $f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w) l(\psi_d)$  με την βοήθεια των εξισώσεων (2.13) και (2.16) παίρνουμε

$$h(\psi_w) = \frac{\frac{d\theta_w}{d\psi}}{L(\psi_w)} \tag{2.32}$$

$$l(\psi_d) = \frac{\frac{d\theta_d(\psi)}{d\psi}}{[1 - H(\psi_d)]} \tag{2.33}$$

Συνεπώς η (2.8) μετατρέπεται στην

$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w) l(\psi_d) = \frac{\frac{d\theta_w}{d\psi}}{L(\psi_w)} \frac{\frac{d\theta_d(\psi)}{d\psi}}{[1 - H(\psi_d)]} \tag{2.34}$$

Από την εξίσωση (2.15) έχουμε

$$L(\psi_w) = \frac{(\theta_d - \theta_w)_{\psi_w}}{[1 - (H(\psi_w))]} \tag{2.35}$$

Οπότε η (2.34) μετατρέπεται στην

$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w) l(\psi_d) = \frac{d\theta(\psi_w)}{d\psi} \frac{d\theta(\psi_d)}{d\psi} \frac{[1 - H(\psi_w)]}{[1 - H(\psi_d)]} \frac{1}{(\theta_d - \theta_w)_{\psi_w}} \tag{2.36}$$

Από την (2.17) έχουμε

$$1 - H(\psi) = e^{-F(\psi)} = e^{\psi_{\min}} \int_{\theta_d - \theta_w}^{\psi} \frac{d\theta_w}{\theta_d - \theta_w} \quad (2.37)$$

Άρα η (2.36) μετατρέπεται στην

$$f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)l(\psi_d) = \frac{d\theta(\psi_w)}{d\psi} \frac{d\theta(\psi_d)}{d\psi} \frac{e^{-F(\psi_w)}}{e^{-F(\psi_d)}} \frac{1}{(\theta_d - \theta_w)_{\psi_w}} \quad (2.38)$$

Αν γίνει σύγκριση της εξίσωσης (2.38) η οποία είναι μετασχηματισμένη μορφή της  $f(\psi_w, \psi_d) = h(\psi_w)l(\psi_d)$  του Muallem (1973) με την

$$\bar{F}_{i,n} = \frac{f \Theta'_i}{e \Theta_i - f \Theta_i} \left[ e \Theta'_n - \int_{f S_n}^{f S_i} \bar{F}(e S_n, f S) d_f S \right]$$

των P-K (2000) φαίνεται ότι τα δύο πρότυπα θα δίνουν την ίδια τιμή σε ένα σημείο του διαγράμματος κατανομής π.χ.  $G(\psi_w, \psi_d)$  μόνο όταν οι ποσότητες

$$\frac{d\theta_d(\psi_d)}{d\psi} \frac{e^{-F(\psi_w)}}{e^{-F(\psi_d)}} \quad \text{και} \quad e \Theta'_n - \int_{f S_n}^{f S_i} \bar{F}(e S_n, f S) d_f S$$

είναι ίσες, το οποίο όμως δεν ισχύει.

#### 4. Συμπεράσματα

1. Η μεθοδολογία Muallem στηρίζεται στην υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής είναι γινόμενο δύο άλλων ανεξάρτητων συναρτήσεων κατανομής, στην αρχή της ομοιότητας καθώς και στην εισαγωγή πρόσθετων περιορισμών. Αντίθετα η μεθοδολογία των P-K δεν εισάγει πρόσθετες υποθέσεις πέραν αυτών της θεωρίας των ανεξάρτητων στοιχείων. Η μεθοδολογία των P-K αποτελεί στην ουσία μία απλή υπολογιστική διαδικασία που χρησιμοποιεί τις πληροφορίες που παρέχουν οι δύο οριακοί κλάδοι και εξασφαλίζει την εκτίμηση μίας και μοναδικής κατανομής  $\bar{F}$  στο πεδίο ορισμού της (τριγωνικό διάγραμμα κατανομής).
2. Η μεθοδολογία Muallem δεν επικεντρώνεται στον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης κατανομής αλλά στην απ' ευθείας χάραξη των διερευνητικών καμπύλων. Αντίθετα η μεθοδολογία των P-K επικεντρώνεται στον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης κατανομής των στοιχείων από όπου μπορεί να υπολογισθούν

οι διερευνητικές καμπύλες και ταυτόχρονα να εξαχθούν συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά των πόρων που συνιστούν το πορώδες ενός μέσου. Η μεθοδολογία του Mualem δεν μπορεί να δώσει παρόμοιες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των πόρων τουλάχιστον άμεσα.

3. Από την μεθοδολογία Mualem μπορούν να εξαχθούν τρία διαφορετικά διαγράμματα κατανομής χωρίς να υπάρχει καμία συνθήκη η οποία να εξασφαλίζει την ταύτιση των τριών διαγραμμάτων. Αντίθετα η μεθοδολογία των P-K απολήγει σε μία και μοναδική κατανομή των ανεξάρτητων στοιχείων.
4. Οι δύο μεθοδολογίες στηρίζονται σε διαφορετική βάση. Μπορεί να λάβουν την ίδια γενική μορφή, όπου όμως στην περίπτωση του Mualem καταλήγει στην αρχική του υπόθεση, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι τιμές της συνάρτησης κατανομής είναι ταυτόσημες.

## Βιβλιογραφία

1. Enderby, A.J., 1955. *The domain model of hysteresis*. Trans. Faraday Soc., 51: 835-848.
2. Everett, D.H., 1955. *A general approach to hysteresis: 4*. Trans. Faraday Soc. 51: 1551-1557.
3. Kargas, G and Kerkides, P., 2005. *Hysteretic  $\Theta(S)$  curve prediction: Comparison of two models*. Transport in porous media 59: 97-113.
4. Kargas, G., Kerkides P. and Poulouvasilis, A., 2007. *A new method for calculating hysteretic  $K(S)$  relationship*. Transport in porous media, 68: 175-185.
5. Mualem, Y., 1973. *Modified approach to capillary hysteresis based on a similarity hypothesis*. Water Resour. Res., 9: 1324-1331.
6. Mualem, Y., 1974. *A conceptual model of hysteresis*. Water Resour. Res., 10: 514-520.
7. Mualem, Y. and Dagan, G., 1975. *A dependent domain model of capillary hysteresis*, Water Resour. Res., 11: 452-460.
8. Mualem, Y., 1977. *Extension of the similarity hypothesis used for modelling the soil water characteristics*. Water Resour. Res., 13: 773-780
9. Mualem, Y. and Miller, E.E., 1979. *A hysteresis model based on an explicit domain-dependence function*. Soil Sci. Soc. Am. J., 43: 1067-1073.
10. Mualem, Y., 1984. *A modified dependent-domain theory of hysteresis*. Soil Sci. Soc. Am. J., 137: 283-291.
11. Parlange, J.Y., 1976. *Capillary hysteresis and the relationship between drying and wetting curves*. Water Resour. Res., 12: 224-228.
12. Philip, J.R., 1964. *Similarity hypothesis for capillary hysteresis in porous materials*. J. Geophys. Res., 69: 1553-1562.

13. Poulouvasilis, A., 1962. *Hysteresis of pore water, an application of concept of independent domains*. Soil Sci., 93: 405-412.
14. Poulouvasilis, A., 1970. *Hysteresis of pore water in granular porous bodies*. Soil Sci., 109: 5-12.
15. Poulouvasilis, A. and Childs, E.E., 1971. *The hysteresis of pore water: The non-independence of domains*. Soil Sci., 112: 301-312.
16. Poulouvasilis, A. and Kargas, G., 2000. *A Note on calculating hysteretic behaviour*, Soil. Sci. Soc. Am. J., 64: 1947-1950.
17. Talsma, T., 1970. *Hysteresis in two sands and the Independent Domain Model*. Water.Resour.Res., 6: 964-970
18. Topp, G.C. and Miller, E.E., 1966. *Hysteretic moisture characteristics and hydraulic conductivities for glass-bead media*. Soil Sci Soc. Am. Proc., 30: 156-162.
19. Κάργας, Γ., 2002. *Η επίδραση της υστέρησης στην κατανομή των υγρών μέσα σε πορώδη μέσα*. Διδακτορική διατριβή, Γ.Π.Α.